11. IL MOTO LUNGO LA VERTICALE

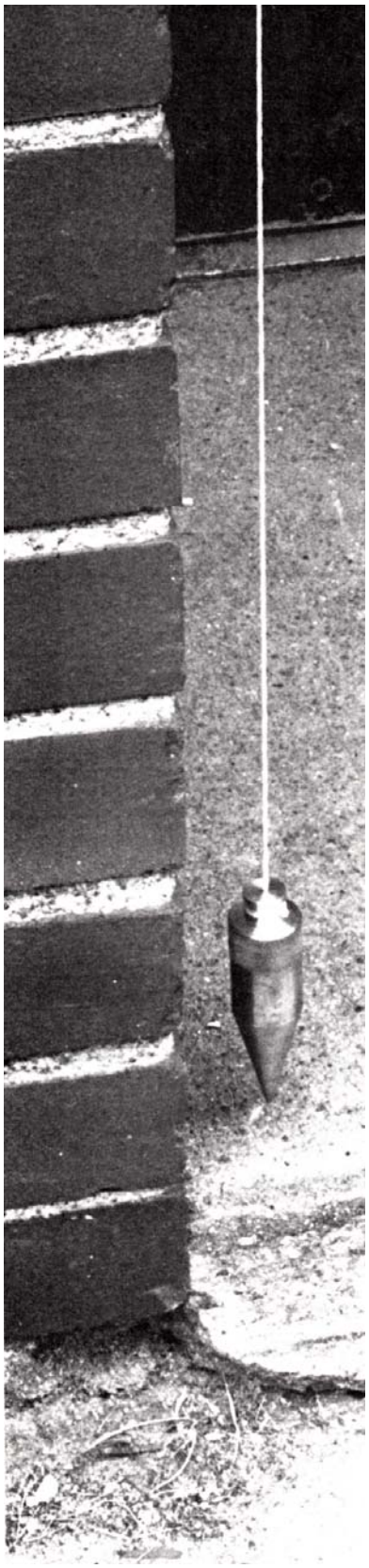

Fig. 11.1. Il filo a piombo viene usato dai muratori per assicurarsi che i muri siano verticali.

In questo capitolo inizieremo lo studio delle forze presenti in natura. Le determineremo studiando il moto dei corpi sui quali esse agiscono, oppure, quando è possibile, equilibrando forze sconosciute con forze note che possiamo applicare. Qui, sulla superficie terrestre, a tutti noi è familiare la forza di gravità: la studieremo per prima cominciando a studiare il moto lungo la verticale.

11.1. Il peso e il campo gravitazionale vicino alla Terra

Un filo a piombo appeso in un qualsiasi punto della superficie terrestre (Fig. 11.1) si dispone lungo la direzione della forza di gravità che agisce sulla massa del piombo. Oggetti diversi sono attirati verso il basso da forze gravitazionali con modulo diverso: il modulo di questa particolare forza è detto peso dell'oggetto e può essere misurato appendendo l'oggetto ad una bilancia a molla, tarata in newton.

Fili a piombo appesi a distanza di pochi kilometri l'uno dall'altro sono praticamente paralleli: entro zone di queste dimensioni la forza di gravità ha la stessa direzione. Anche il modulo della forza di gravità che agisce su un dato oggetto è costante in tale zona: in particolare, il peso di una massa campione di 1 kg ha un valore costante di circa 9.8 N, una massa di 2 kg pesa 19.6 N, una di 3 kg pesa 29.4 N, e così via. Perciò il modulo della forza di gravità F che agisce su di un oggetto di massa gravitazionale m_g, si può scrivere

$$F = m_g \cdot g \qquad [11.1]$$

dove g è il fattore di conversione fra la massa gravitazionale e la forza di gravità (o peso).

La forza è una grandezza vettoriale, mentre la massa è uno scalare. Perciò anche il fattore di conversione deve essere un vettore. Quindi, la relazione [11.1] dovrebbe essere riscritta sotto forma di relazione vettoriale:

$$\mathbf{F} = m_g \cdot \mathbf{g}\,. \qquad [11.2]$$

È lecito porsi alcune domande a proposito di **g**. Quali sono la direzione e il verso di **g**? Sono gli stessi ovunque? E il suo modulo è variabile?

La direzione e il verso di **g** sono indicati, come la forza di gravità, da un filo a piombo (Fig. 11.1) che si dispone verso il basso secondo la verticale del luogo dove esso si trova. Fili a piombo sospesi entro qualche kilometro l'uno dall'altro sono paralleli entro gli errori sperimentali. Perciò su distanze così brevi la direzione orientata di **g** non varia.

Su grandi distanze la situazione è piuttosto diversa. In ogni località un filo a piombo si dispone verso il basso secondo la verticale del posto, ma la verticale all'equatore è perpendicolare alla verticale al Polo Nord, e la verticale verso il basso al Polo Sud ha verso opposto a quello della verticale verso il basso al Polo Nord. Perciò, la direzione e il verso di **g** dipendono fortemente dalla località.

Il modulo di **g** differisce soltanto lievemente da località a località sulla superficie della Terra. Per esempio, sospendendo al Polo Nord masse note a un dinamometro a molla, si ottiene g = 9.83 N/kg. All'equatore si ottiene invece g =9.78 N/kg.

Il modulo e la direzione orientata di **g** sono stati misurati e tabulati per numerose località sulla superficie della Terra. Un insieme siffatto di valori di una grandezza fisica che dipende dalla posizione è detto *campo*, nel nostro caso parleremo di *campo gravitazionale*.

Quesiti

11.1. Se la forza di gravità agente su un oggetto è 49.0 N nel punto in cui il campo gravitazionale è 9.80 N/kg, qual è la massa dell'oggetto?

11.2. La forza di gravità sulla superficie della Luna è un sesto di quella sulla superficie della Terra.
(*a*) Quanto peserà sulla Luna un uomo la cui massa è di 70 kg? Quanto peserà sulla Terra?
(*b*) Quale sarà la sua massa sulla Luna?

11.2. Caduta libera

Come si muove un oggetto se agisce su di esso la forza di gravità? Supponiamo di lasciarlo cadere: il suo moto dipende sia dalla forza risultante che agisce su di esso, sia dalla sua massa inerziale. La forza risultante **F** che agisce su un corpo che cade è data dalla somma vettoriale dell'attrazione gravitazionale $\mathbf{F}_g = m_g\mathbf{g}$ (il peso del corpo) e della resistenza dell'aria $\mathbf{F}_a$. Si ha quindi:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_a + m_g\mathbf{g}\,. \qquad [11.3]$$

Secondo la legge del moto di Newton, l'accelerazione dell'oggetto è direttamente proporzionale a questa forza risultante e inversamente proporzionale alla massa inerziale m_i; cioè:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m_i} = \frac{\mathbf{F}_a + m_g\mathbf{g}}{m_i} \qquad [11.4]$$

Ora, per oggetti relativamente densi e per basse velocità, la resistenza dell'aria è molto piccola e può essere trascurata rispetto al peso. In tal caso è importante solo l'attrazione gravitazionale e possiamo prevedere che l'accelerazione dell'oggetto sia:

$$\mathbf{a} = \frac{m_g}{m_i}\mathbf{g} \qquad [11.5]$$

Eccoci giunti a una cosa importante. Come abbiamo già visto nel Cap. 10, il rapporto m_g/m_i è lo stesso per tutti gli oggetti, di conseguenza l'accelerazione non dipende dalla massa dell'oggetto. Infatti, misurando m_i e m_g nelle stesse unità di misura, abbiamo posto $m_i = m_g$, cioè $m_g/m_i = 1$. Segue allora che, per un corpo che cade liberamente:

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} \qquad [11.6]$$

In altre parole, possiamo prevedere che tutti gli oggetti che si muovono sotto l'influenza della sola gravità avranno la stessa accelerazione, a patto che si trovino nello stesso luogo.

Cosa troviamo in realtà? Tutti i corpi di densità sufficientemente alta (cioè di grande massa per unità di volume) cadono, nello stesso luogo, con la stessa accelerazione e il valore di questa accelerazione è molto vicino a 9.8 m/s^2 in qualsiasi luogo prossimo alla superficie terrestre. È indifferente misurarla in un laboratorio al primo piano di un edificio oppure all'ultimo piano, lasciar cadere un corpo da fermo oppure lanciarlo in alto con una qualsiasi velocità, purché ragionevolmente limitata.

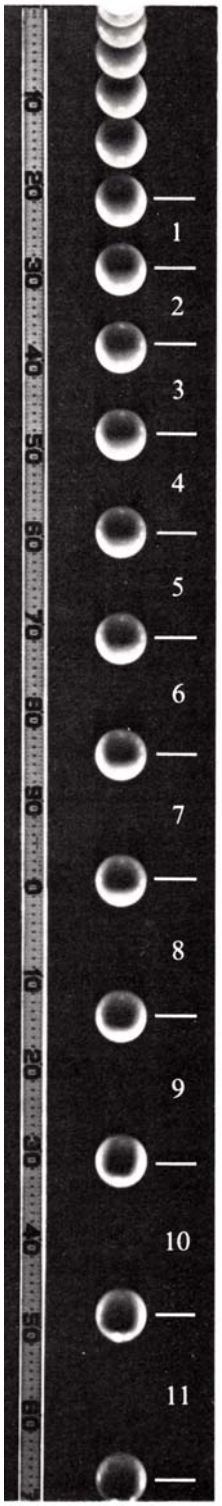

Fig. 11.2. Fotografia multi-flash di una palla da biliardo che cade. La scala è in centimetri e gli intervalli di tempo tra le successive posizioni della palla sono di 1/30 di secondo. Il moto è analizzato in Tab. 11.1.

Accurate misure eseguite su istantanee successive di un oggetto che cade (Fig. 11.2), fotografato a intervalli di un trentesimo di secondo, conducono ai risultati mostrati in Tab. 11.1. Questi risultati confermano la nostra affermazione, che il campo gravitazionale in prossimità della superficie terrestre imprime agli oggetti che cadono un'accelerazione di circa 9.8 m/s^2, diretta verso il basso.

Per essere sicuri che le nostre conclusioni sono valide per tutti gli oggetti, incluse le palline da ping-pong

Tab. 11.1.. Dati ricavati nell'esperimento illustrato nella Fig. 11.2.

Intervallo	Δx (cm)	$v_m = \Delta x/\Delta t$ (cm/s)	Δv_m (cm/s)	$a = \Delta v_m/\Delta t$ (m/s^2)
1	7.70	231		
2	8.75	263	32	9.6
3	9.80	294	31	9.3
4	10.85	326	32	9.6
5	11.99	360	34	10.2
6	13.09	393	33	9.9
7	14.8	425	32	9.6
8	15.22	457	32	9.6
9	16.31	489	32	9.6
10	17.45	524	35	10.5
11	18.52	556	32	9.6
			Accelerazione media	9.8

Analisi del moto mostrato in Fig. 11.2. I valori dell'accelerazione sono costanti entro i limiti di precisione delle nostre misure. Pur disponendo dell'immagine di un regolo molto preciso, sulla fotografia stessa della palla, l'ultima cifra significativa nella colonna Δx è del tutto incerta e rappresenta soltanto una stima ragionevole di una frazione di millimetro; essa non è stata tuttavia eliminata, per ridurre gli errori successivi che si sarebbero accumulati se avessimo arrotondato fin da principio. Si noti che nella colonna della velocità abbiamo considerato solo tre cifre significative.

e le piume, dobbiamo eseguire i nostri esperimenti nel vuoto. Questo è stato fatto e si è osservato che in un dato luogo tutti gli oggetti, in assenza dell'aria, cadono con la stessa accelerazione costante, indipendentemente dalla loro forma e dalla loro densità. Partendo da fermi, essi acquistano in un tempo t una velocità verso il basso pari a:

$$v = gt\,, \qquad [11.7]$$

e percorrono, verso il basso, una distanza:

$$d = \tfrac{1}{2}gt^2\,, \qquad [11.8]$$

(si veda il paragrafo 9.8).

Quesiti

11.3. Utilizzare í dati contenuti nella Tab 11.1 per rappresentare graficamente la velocità in funzione del tempo. Qual è la pendenza del grafico così ottenuto?

11.4. Come mostrereste, a partire dalla fotografia multiflash di Fig. 11.2, che la distanza d aumenta di una quantità $\frac{1}{2}gt^2$, se la palla parte da ferma?

11.5. Qual è l'accelerazione istantanea di una palla di massa uguale a 0.20 kg mentre sta cadendo, se g è 9.80 N/kg e la resistenza istantanea dell'aria sulla palla è 0.50 N?

11.6. Supponiamo che un cubo di piombo e un cubo di alluminio abbiano masse gravitazionali uguali, ma masse inerziali diverse. I due cadrebbero con la stessa accelerazione nel vuoto? Spiegare.

11.7. Una palla è lanciata verso l'alto con una velocità di 15 m/s. (Si trascuri la resistenza dell'aria).
(*a*) Qual è la velocità dopo 1.2 s?
(*b*) Qual è l'altezza raggiunta dopo questo tempo?
(*c*) Qual è la velocità dopo 2.3 s?
(*d*) A quale altezza si troverà dopo questo tempo?
(*e*) Qual è l'accelerazione della palla al termine della salita?

11.3. La resistenza dell'aria: moto verticale nell'atmosfera

Se nell'esperimento di Fig. 11.2 sostituiamo la palla da biliardo con una pallina da ping-pong, vediamo che la pallina da ping-pong accumula, rispetto alla palla da biliardo, sempre più ritardo all'aumentare della distanza percorsa. In realtà però, anche la palla da biliardo, se cade per un tratto abbastanza lungo, viene rallentata dalla resistenza dell'aria.

La forza che si oppone al moto nell'aria di un oggetto di forma approssimativamente sferica, dipende dalla velocità, dalle dimensioni e dalla forma dell'oggetto. Alcuni esperimenti mostrano che il modulo di questa forza può essere rappresentato con buona approssimazione dall'espressione

$$F_a = c_1 v + c_2 v^2 \qquad [11.9]$$

conosciuta anche come *legge di Stokes*. Il verso della forza $\mathbf{F}_a$ è opposto al verso della velocità **v**.

Per un oggetto che si muove verso il basso, la forza risultante sarà

$$F = mg - c_1 v - c_2 v^2 . \qquad [11.10]$$

Da questa espressione della forza risultante si può trarre un certo numero di conclusioni del tutto generali. Prima di tutto, un corpo che cade a partire da una condizione di quiete ha un'accelerazione iniziale come se non esistesse la resistenza dell'aria; al crescere della velocità, la forza risultante diminuisce e tende a zero, se il corpo cade da una quota sufficientemente alta. Quando la forza risultante si avvicina a zero, la velocità del corpo rimane praticamente costante: si definisce questa velocità costante *velocità di regime* o *velocità limite*. Il modulo della velocità limite dipende dal peso dell'oggetto (mg) e dalle due costanti c_1 e c_2. Chiariremo questa dipendenza prendendo come esempio due oggetti: una pallina da ping-pong con una massa di 2.2 g e un diametro di 3.8 cm, e una microsfera di plastica con una massa di 2.9×10^{-12} g e un diametro di 1.8×10^{-4} cm.

Per la pallina da ping-pong, la forza risultante, in newton, sarà

$$F = 2.2\times10^{-2}\,\mathrm{N} - 6.4\times10^{-6}\,\frac{\mathrm{N\cdot s}}{\mathrm{m}}\,v - 3.5\times10^{-4}\,\frac{\mathrm{N\cdot s^2}}{\mathrm{m^2}}\,v^2 . \qquad [11.11]$$

Il grafico di questa funzione è mostrato in Fig. 11.3. È importante notare che se la velocità è di circa 8 m/s, la forza risultante si annulla. Quindi la velocità limite di caduta di una pallina da ping-pong è circa 8 m/s.

Nel caso della microsfera di plastica, la forza risultante sarà

$$F = 2.8\times10^{-14}\,\mathrm{N} - 2.9\times10^{-10}\,\frac{\mathrm{N\cdot s}}{\mathrm{m}}\,v - 7.0\times10^{-13}\,\frac{\mathrm{N\cdot s^2}}{\mathrm{m^2}}\,v^2 . \qquad [11.12]$$

La velocità limite della microsfera è all'incirca 1.0×10^{-4} m/s (0.10 mm/s), come si può vedere nella Fig.11.4 dove è riportato il grafico della forza risultante in funzione della velocità. Un corpo che parte da fermo impiega un tempo estremamente breve per raggiungere una velocità così piccola. Perciò microsfere di questo tipo (e le particelle di polvere di dimensioni analoghe) cadono quasi immediatamente con velocità costante nell'ipotesi che non ci siano correnti d'aria.

Ci si può chiedere perché il grafico della Fig. 11.3 è simile a una parabola, mentre il grafico di Fig.11.4 è chiaramente una retta nonostante che le espressioni algebriche delle due funzioni siano pressoché uguali. Nel caso della pallina da ping-pong il termine contenente v^2 è, in corrispondenza della velocità limite, molto maggiore del termine contenente v. Nel caso della microsfera la situazione è esattamente opposta: il termine contenente v^2 è trascurabile e questo fa sì che il grafico non sia una parabola, ma una retta.

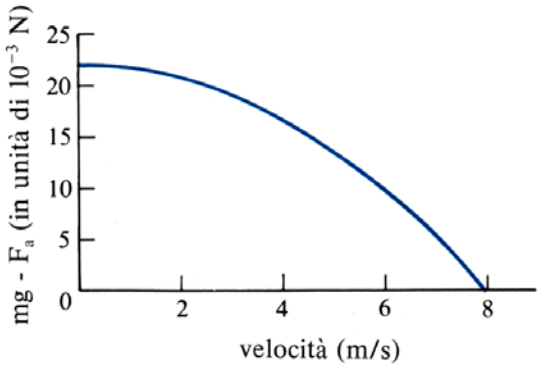

Fig. 11.3. Grafico della forza risultante che agisce su una pallina da ping-pong che cade nell'aria, partendo da ferma, in funzione della velocità.

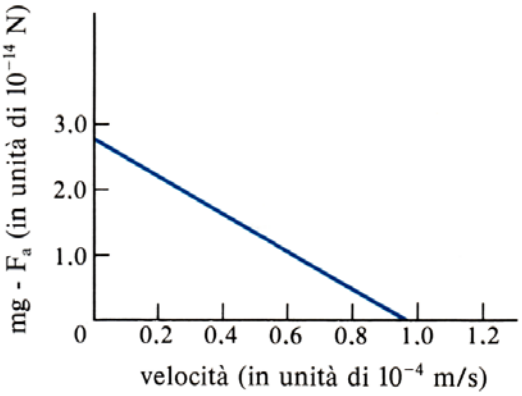

Fig. 11.4. Grafico della forza risultante che agisce su una microsfera di plastica che cade nell'aria, partendo da ferma, in funzione della velocità.

Quesiti

11.8. Che cosa accade se si lancia una pallina da ping-pong verso il basso con una velocità maggiore della sua velocità limite?

11.9. (*a*) Qual è la velocità della pallina da ping-pong quando il termine contenente v è uguale al termine contenente v^2 nell'espressione [11.11]?

(*b*) Quale sarebbe la velocità delle microsfere di plastica nelle stesse condizioni?

(*c*) Si possono segnare questi punti sui grafici delle figure 11.3 e 11.4?

11.10. Un grosso chicco di grandine ha una massa di 3.9×10^{-3} kg e un diametro di 2.0×10^{-2} m. I valori delle costanti nella relazione [11.9] sono $c_1 = 3.4\times10^{-6}$ N·s/m e $c_2 = 9.4\times10^{-5}$ N·s^2/m^2. Qual è la velocità limite del grosso chicco di grandine?

Problemi di fine capitolo

11.11. Se corpi diversi avessero rapporti diversi tra la massa inerziale e la massa gravitazionale, essi sarebbero soggetti alla stessa accelerazione nel campo gravitazionale della Terra? Spiegare.

11.12. Un sasso viene lasciato cadere da una rupe la cui altezza rispetto alla base è h. Nello stesso istante una palla viene lanciata verticalmente verso l'alto dalla base della rupe con la velocità iniziale v. Nell'ipotesi che la palla venga lanciata con velocità sufficiente, in quale istante t il sasso e la palla si incontreranno? (Trascurare la resistenza dell'aria.)

11.13. Per i corpi sferici, la costante c_1 che compare nell'espressione per la resistenza dell'aria è direttamente proporzionale al raggio della sfera, mentre la costante c_2 è direttamente proporzionale al quadrato del raggio.

(*a*) Usando queste informazioni, trovate un'espressione per la forza risultante che agisce su un pallone da pallacanestro in funzione della sua velocità.

(*b*) Costruire un diagramma della forza risultante che agisce su un pallone da pallacanestro che cade verticalmente in funzione della velocità.

(*c*) Qual è la velocità limite di caduta del pallone?

11.14. Ai fini del calcolo della resistenza dell'aria, una buona approssimazione di una persona può essere una sfera di raggio 0.44 m.

(*a*) Usando le leggi di scala per c_1 e c_2 enunciate nel problema precedente, trovare la forza risultante che agisce su una persona che cade verticalmente attraverso l'aria.

(*b*) Qual è la velocità limite di una persona che cade attraverso l'aria?