

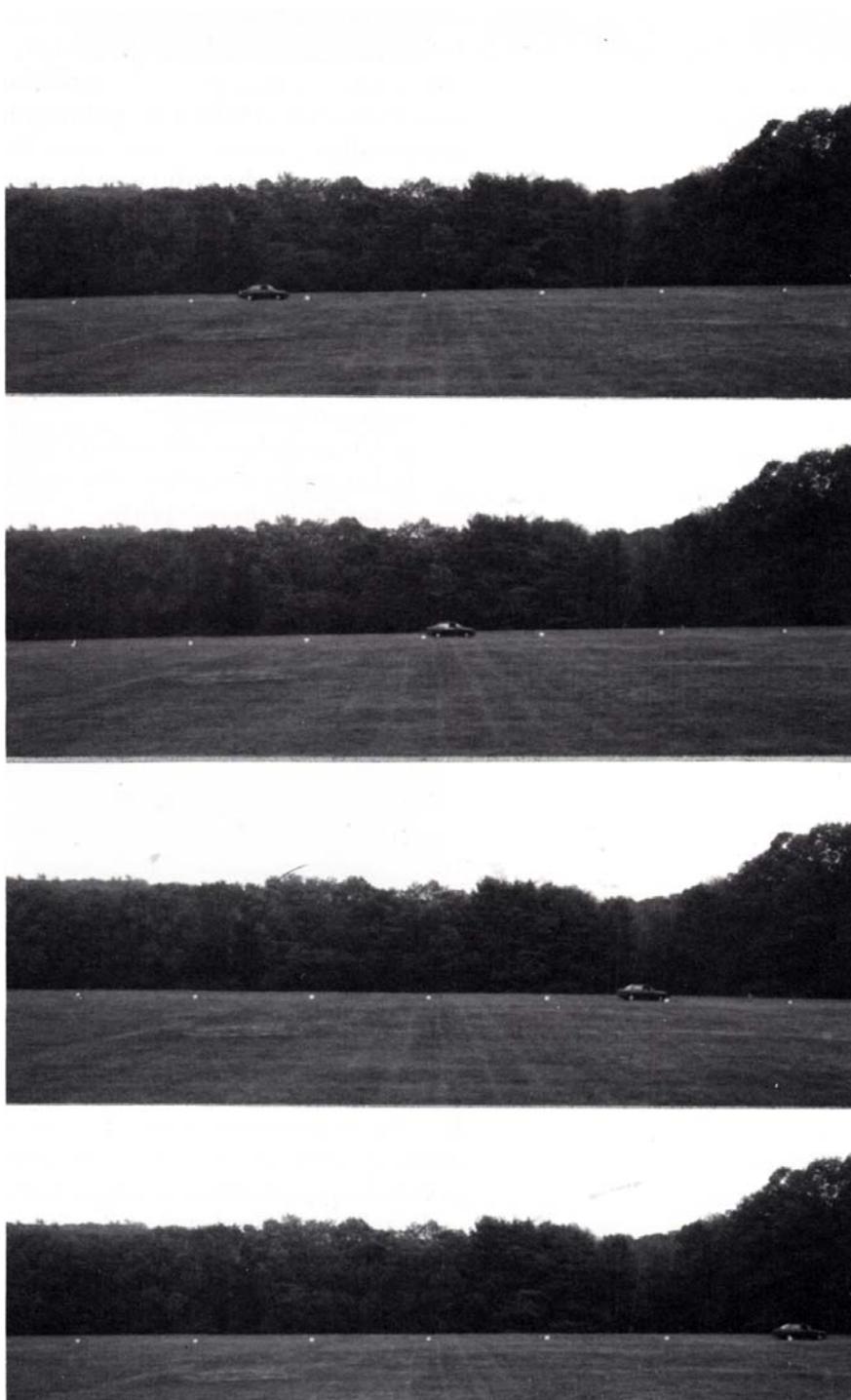
## 9. MOTO RETTILINEO

### 9.1. Corpi reali e punti materiali

In una corsa automobilistica tutte le automobili percorrono la stessa pista. Però ciò che interessa gli spettatori è sapere in quale posizione è ogni automobile e in quale istante è in quella posizione. Per registrare il moto dell'automobile si può girare un film della gara.

Un film è costituito da una successione di fotografie (fotogrammi) eseguite a intervalli di tempo regolari. I quattro fotogrammi della Fig. 9.1 sono stati eseguiti con una macchina fotografica a intervalli di 2.0 s. Si può descrivere la posizione dell'automobile in ciascun fotogramma facendo riferimento ai segni bianchi posti a 10.0 m l'uno dall'altro.

È importante notare che la lunghezza dell'automobile è una frazione notevole della distanza tra due segni consecutivi.



**Fig. 9.1.** Un'automobile in movimento fotografata con una macchina fotografica fissa a intervalli di 2.0 s. La distanza tra gli indicatori stradali era di 10.0 m.

Perciò la domanda «Dov'è l'automobile?» è piuttosto vaga: la parte anteriore dell'automobile occupa una posizione diversa da quella occupata dalla parte posteriore. Si può rendere più precisa la domanda chiedendo «Dove è il centro della ruota anteriore destra?» oppure «Dove è il centro dell'automobile?». In alcuni casi questa distinzione è importante, per esempio quando un'automobile è in un fosso. Quando si vuole però descrivere la posizione di un'automobile su un'autostrada che collega due città, si può trascurare la lunghezza dell'automobile. E analogamente si possono trascurare la larghezza e l'altezza dell'automobile. Inoltre finché l'automobile non slitta e non si mette a ruotare su se stessa si può trascurare ogni suo moto rotatorio.

In certe condizioni si può quindi descrivere in modo soddisfacente il moto di un corpo considerando che il corpo sia un *punto materiale*. Questa approssimazione è valida anche per un corpo grande come la Terra quando si studia il moto della Terra attorno al Sole. Per contro, non si può studiare in modo soddisfacente il moto di una biglia che rotola se si assimila la biglia a un punto trascurando la sua rotazione. Quando sarà possibile, sostituiranno i corpi mobili con punti materiali, ma dovremo essere sicuri che così facendo non alteriamo gli aspetti essenziali della situazione reale.

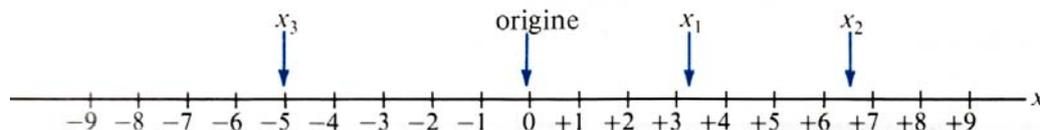
## Quesiti

- 9.1.** In quali delle situazioni seguenti è lecito assimilare il corpo mobile a un punto materiale?
- Un aeroplano che vola da New York a Londra.
  - Lo stesso aeroplano che si sta avvicinando a una pista di atterraggio in un aeroporto.
  - Un saltatore in alto durante un salto.
  - Un maratoneta lungo il percorso di gara.
- 9.2.** Descrivete la posizione dell'automobile nel primo fotogramma della Fig. 9.1.
- 9.3.** (a) Nella Fig. 9.1, quale distanza ha percorso l'automobile nell'intervallo di tempo tra il primo e il secondo fotogramma?
- Se avete dato una risposta approssimata al punto (a), come potreste essere più precisi?
  - In che modo potete stabilire che l'intervallo di tempo durante il quale l'otturatore della macchina fotografica è rimasto aperto (il tempo di esposizione) è stato minore di un decimo di secondo?

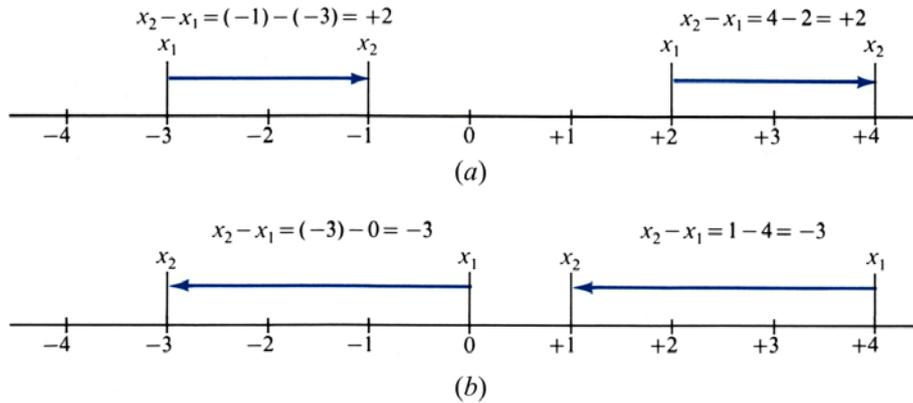
## 9.2. Posizione e spostamento lungo una linea retta

Il primo passo nello studio del moto è descrivere la posizione di un oggetto che si sta muovendo. Supponiamo che la strada rettilinea, su cui si sta muovendo l'automobile della Fig. 9.1, sia orientata in direzione est-ovest. Per rispondere alla domanda «dove si trova l'automobile?» dobbiamo specificare la sua posizione rispetto a un determinato punto. Qualunque punto di riferimento può servire a questo scopo, ossia può essere scelto come origine per misurare la posizione. Stabilendo, poi, quanto dista l'automobile dal punto di riferimento e in quale verso si muove, verso est o verso ovest, si otterrà la descrizione completa della posizione dell'automobile. Ad esempio, nel caso in cui l'automobile si trovi a 5 chilometri a ovest del centro della città, o a 3 chilometri a est di un certo ponte, per rispondere alla domanda «dove si trova l'automobile?» non è sufficiente dire solo «a cinque chilometri dal centro della città»: non sapremmo se si trova a 5 chilometri verso est o verso ovest.

In maniera analoga, volendo descrivere la posizione di un punto su una retta si deve specificare un'origine, fissare una distanza e stabilire un verso rispetto a quell'origine. In questo caso non si può parlare di est e ovest, perché la retta può non essere orientata secondo questa direzione; potremmo dire «verso destra» e «verso sinistra», ma un osservatore situato sull'altra parte della retta come interpreterebbe queste parole? Per ottenere una descrizione del verso lungo la retta sul quale tutti possano concordare, chiameremo positiva la parte di retta situata da una parte rispetto all'origine e negativa l'altra; si può quindi individuare la posizione del punto sulla retta mediante un numero positivo o negativo che fornisce sia la distanza (in opportune unità di misura) sia il verso in quel punto rispetto all'origine. Tale numero, con il suo segno e il suo valore, verrà chiamato coordinata del punto. Se assumeremo la retta come retta delle coordinate  $x$  potremo contrassegnare tali coordinate con  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , ecc. (Fig. 9.2).



**Fig. 9.2.** La retta delle coordinate  $x$ .



**Fig. 9.3.** Due spostamenti uguali, (a) positivi e (b) negativi.

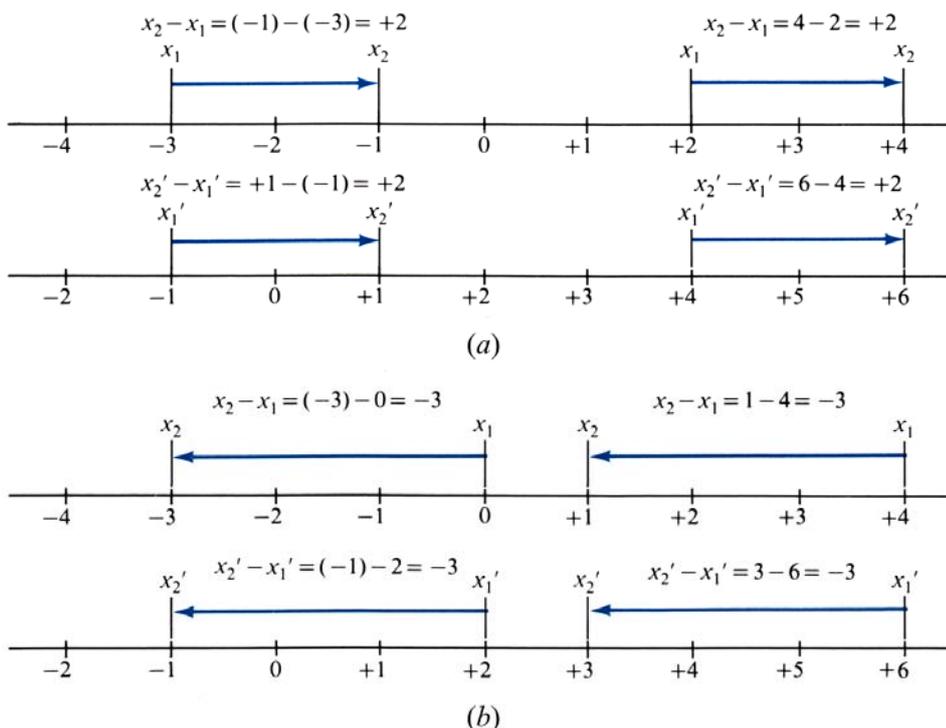
Nello studio del moto dovremo spesso fare riferimento alla variazione della posizione; perciò, a tale variazione daremo un nome particolare, *spostamento*. Se un oggetto si muove dalla posizione  $x_1$  alla posizione  $x_2$ , lo spostamento è dato dalla differenza  $x_2 - x_1$ , cioè dalla differenza fra la coordinata relativa all'ultima posizione e quella relativa alla prima. Lo spostamento può essere positivo o negativo (positivo quando  $x_2$  è maggiore di  $x_1$ , negativo quando  $x_2$  è minore di  $x_1$ ). Il fatto che lo spostamento sia positivo o negativo dipende solo dal verso del moto; non dipende invece dalla parte della retta delle coordinate  $x$  sulla quale sono rappresentate le posizioni. I due spostamenti di Fig. 9.3 (a) sono positivi e uguali fra loro, mentre i due spostamenti di Fig. 9.3 (b) sono negativi e uguali anch'essi fra loro.

Gli spostamenti sono anche indipendenti dal punto scelto come origine della retta delle coordinate. La Fig. 9.4 mostra le coordinate degli stessi punti di Fig. 9.3, ma su una retta delle coordinate la cui origine è situata in un punto diverso. Le coordinate sono diverse, ma gli spostamenti, essendo differenze, sono uguali. In scienze e in matematica s'incontrano tanto spesso differenze, o variazioni, che si usa una notazione particolare per esprimerle. La lettera greca delta, che si scrive  $\Delta$  (D maiuscola dell'alfabeto greco), è usata in genere al posto di «differenza» o «intervallo» o «variazione di», o «incremento di». Così  $\Delta a$  significa «variazione di  $a$ » o «incremento di  $a$ » e si legge «delta  $a$ ». Non ha senso separare  $\Delta$  da  $a$ . L'intero simbolo  $\Delta a$  ha un significato speciale: variazione di  $a$  o intervallo di  $a$ . Non significa  $\Delta$  moltiplicata per  $a$ .

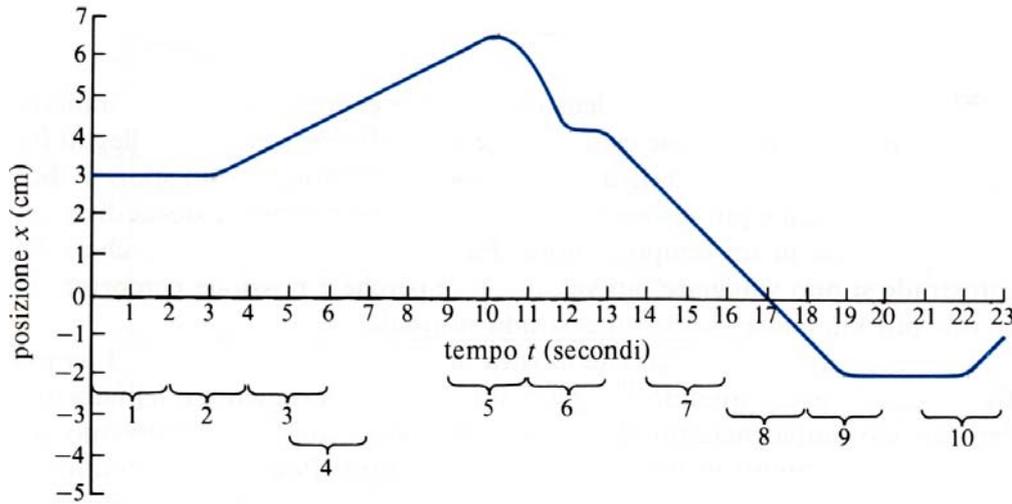
In particolare, nel caso di una variazione di posizione, lo spostamento viene indicato con

$$\Delta x = x_2 - x_1 \tag{9.1}$$

dove  $x_1$  rappresenta la posizione iniziale mentre  $x_2$  rappresenta la posizione finale.



**Fig. 9.4.** Nella parte superiore di (a) sono rappresentati gli stessi spostamenti della Fig. 9.3 (a); nella parte inferiore gli stessi spostamenti sono riferiti ad un asse delle coordinate avente un'origine diversa. In (b) gli spostamenti di Fig. 9.3 (b) sono riferiti ad un'origine diversa.



**Fig. 9.5.** Grafico tempo-posizione (*diagramma orario*).

Per descrivere il moto di un oggetto lungo una retta delle coordinate, spesso conviene disegnare un grafico della posizione in funzione del tempo (detto *diagramma orario*). In tali grafici, in genere si rappresenta il tempo lungo l'asse orizzontale e la posizione lungo l'asse verticale. La Fig. 9.5 è un esempio di tale grafico. Esistono molte caratteristiche qualitative riguardanti il moto che si possono ricavare subito dal grafico.

L'oggetto si trovava nella posizione  $x = 3.0$  cm nell'istante scelto come istante iniziale, in questo posizione è rimasto fino all'istante  $t = 3.0$  s, da questo istante ha cominciato ad allontanarsi dall'origine; la sua posizione più distante è stata  $x = 6.5$  cm ed è arrivato in essa nell'istante  $t = 10.2$  s. Poi ha cambiato il verso di percorrenza, ha attraversato l'origine, e si è arrestato di nuovo in  $x = -2.0$  cm, ecc.

In generale con la scrittura  $x_1$  (equivalente a  $x(t_1)$ ) si intende la posizione occupata dall'oggetto nell'istante  $t_1$ , con  $x_2$  (equivalente a  $x(t_2)$ ) si intende la posizione occupata dall'oggetto nell'istante  $t_2$  e così via. La scrittura  $x(t)$  sta a indicare la posizione in funzione del tempo che trova la sua rappresentazione nel diagramma orario.

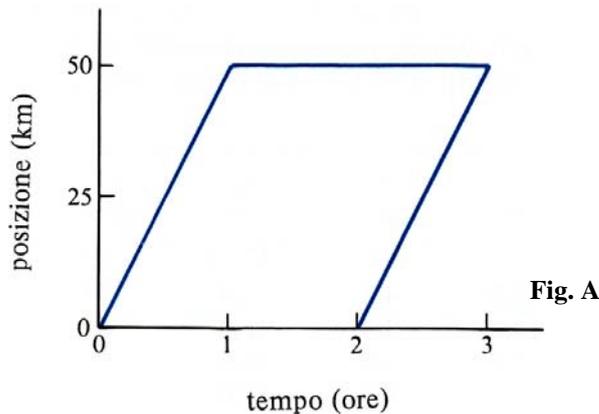
**Quesiti**

- 9.4.** Esprimere la variazione delle seguenti quantità, utilizzando la notazione  $\Delta$ .
- (a) La temperatura  $T_1$  di una stanza alle ore 9 era  $19^\circ\text{C}$ , ed un'ora più tardi la temperatura  $T_2$  era  $25^\circ\text{C}$ .
  - (b) La lettura  $s_1$  del contakilometri all'inizio di un viaggio era 2380 km, e la lettura  $s_2$  alla fine del viaggio era 4060 km.
  - (c) Prima di dimagrire la massa  $m_1$  di una persona era 80 kg, e dopo la dieta la massa  $m_2$  della stessa persona era 70 kg.

**9.5.** Nella tabella a lato quali spostamenti sono uguali?

**9.6.** Il grafico, relativo al viaggio di un'automobile, riportato nella Fig. A rappresenta una situazione reale? Perché?

	$x_1$ (m)	$x_2$ (m)
(1)	5	8
(2)	7	-2
(3)	-5	-2
(4)	15	12
(5)	0	2
(6)	-5	-8
(7)	-5	0



### 9.3. Moto uniforme: velocità costante

«Moto veloce» e «moto lento» sono due espressioni a tutti familiari, ma forse non si è notato che esistono due modi diversi (sebbene collegati fra loro) per esprimere quantitativamente questa distinzione. Nello sport si dice che un corridore  $a$  è più veloce di un corridore  $b$  se  $a$  copre la stessa distanza che copre  $b$  ma in un tempo minore. Parlando di strade, si dice che sulle autostrade si può viaggiare più velocemente perché è possibile percorrere in un'ora più chilometri che su una strada normale.

Possiamo usare il grafico che mostra la posizione in funzione del tempo (Fig. 9.5) per trovare quando l'oggetto si è mosso velocemente o lentamente. Per far ciò impiegheremo il secondo metodo, cioè, confronteremo gli spostamenti compiuti in uguali intervalli di tempo. Poiché un intervallo di tempo è dato dalla differenza fra due coordinate temporali  $t_1$  e  $t_2$ , si indica in modo appropriato la differenza  $t_2 - t_1$ , con  $\Delta t$ .

Come esempio, si possono confrontare gli spostamenti dell'oggetto il cui moto è descritto nella Fig. 9.5 durante intervalli di tempo  $\Delta t = 2$  s, con iniziò in istanti diversi (Tab. 9.1).

La Tab. 9.1 indica che l'oggetto si è mosso più velocemente durante gli intervalli 6, 7 e 8, e che si è mosso verso sinistra. (In questi intervalli,  $\Delta x$  ha valore assoluto massimo ed è negativo).

**Tab. 9.1.**

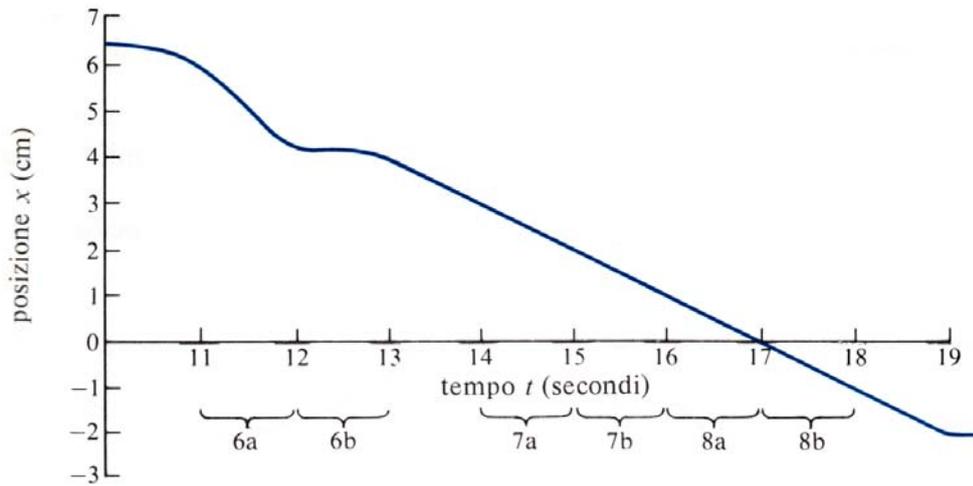
Intervallo	$t_1$ (s)	$x_1$ (cm)	$t_2$ (s)	$x_2$ (cm)	$\Delta t$ (s)	$\Delta x$ (cm)
1	0.0	3.0	2.0	3.0	2.0	0.0
2	2.0	3.0	4.0	3.5	2.0	0.5
3	4.0	3.5	6.0	4.5	2.0	1.0
4	5.0	4.0	7.0	5.0	2.0	1.0
5	9.0	6.0	11.0	6.0	2.0	0.0
6	11.0	6.0	13.0	4.0	2.0	-2.0
7	14.0	3.0	16.0	1.0	2.0	-2.0
8	16.0	1.0	18.0	-1.0	2.0	-2.0
9	18.0	-1.0	20.0	-2.0	2.0	-1.0
10	21.0	-2.0	23.0	-1.0	2.0	1.0

Durante gli intervalli 1 e 5 lo spostamento è stato nullo: ciò significa che durante questi intervalli l'oggetto è rimasto fermo? La tabella da sola non basta per rispondere alla domanda. Ritornando al grafico della Fig. 9.5, si vede che in ogni istante dell'intervallo 1 (cioè, fra  $t = 0.0$  s e  $t = 2.0$  s) l'oggetto è rimasto fermo in  $x = 3.0$  cm. Ma, durante l'intervallo 5 (fra  $t = 9.0$  s e  $t = 11.0$  s), l'oggetto si è mosso dapprima verso destra (verso l'alto sull'asse  $x$ ) e quindi verso sinistra (verso il basso sull'asse  $x$ ). È accaduto soltanto che alla fine dell'intervallo di tempo l'oggetto ha riassunto la posizione iniziale.

Esaminiamo ora il moto durante gli intervalli 6, 7 e 8. In tutti e tre lo spostamento è stato  $-2.0$  cm: anche il moto è stato lo stesso? Per rispondere alla domanda, ridisegniamo la Fig. 9.5 in una scala più grande, dividiamo in due parti uguali ciascun intervallo di tempo, e troviamo gli spostamenti corrispondenti (Fig. 9.6). I risultati sono indicati nella Tab. 9.2.

**Tab. 9.2.**

Intervallo	$t_1$ (s)	$x_1$ (cm)	$t_2$ (s)	$x_2$ (cm)	$\Delta t$ (s)	$\Delta x$ (cm)
6a	11.0	6.0	12.0	-4.2	1.0	-1.8
6b	12.0	4.2	13.0	4.0	1.0	-0.2
7a	14.0	3.0	15.0	2.0	1.0	-1.0
7b	15.0	2.0	16.0	1.0	1.0	-1.0
8a	16.0	1.0	17.0	0.0	1.0	-1.0
8b	17.0	0.0	18.0	-1.0	1.0	-1.0



**Fig. 9.6.** Particolare della Fig. 9.5 ridisegnato su scala ingrandita.

Come risulta dalla Tab. 9.2, la suddivisione dell'intervallo 6 indica che vi sono stati spostamenti disuguali, mentre la suddivisione degli intervalli 7 e 8 indica spostamenti uguali entro la precisione di lettura del grafico. Ulteriori suddivisioni degli intervalli 7 e 8 indicano che, per intervalli di tempo uguali qualsiasi, questi spostamenti più piccoli così ottenuti sono anch'essi uguali. Un moto con queste caratteristiche è detto moto uniforme. In un grafico della posizione in funzione del tempo, i tratti corrispondenti al moto uniforme devono essere segmenti di retta, perché solo nel caso di una retta a variazioni uguali lungo un asse corrispondono variazioni uguali lungo l'altro.

Il moto uniforme negli intervalli 7 e 8 può essere esaminato in un'altra maniera. In ciascun secondo lo spostamento è 1.0 cm; in 2.0 s è il doppio, ossia 2.0 cm; in 3.0 s è tre volte tanto, ossia 3.0 cm e così via, finché il moto rimane uniforme. Possiamo generalizzare questo risultato nella maniera seguente: se per tutti gli intervalli di tempo uguali gli spostamenti sono uguali, allora lo spostamento è proporzionale all'intervallo di tempo:

$$\Delta x = v \cdot \Delta t \quad [9.2]$$

dove  $v$ , la costante di proporzionalità, è la velocità. Poiché  $\Delta x$  ha la dimensione di una lunghezza e  $\Delta t$  la dimensione di un tempo,  $v$  ha le dimensioni di una lunghezza divisa per un tempo, ovvero lunghezza per unità di tempo. Le unità in cui è espressa dipendono dalle unità in cui sono espressi lo spostamento e il tempo. Per esempio, se  $\Delta x$  è espresso in centimetri e  $\Delta t$  in secondi  $v$  è espressa in centimetri su secondi. È più facile vederlo scrivendo:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad [9.3]$$

Nel caso del tratto rettilineo del grafico di Fig. 9.6 che abbiamo appena discusso,  $v = \Delta x / \Delta t = (-2.0 \text{ cm} / 2.0 \text{ s}) = -1.0 \text{ cm/s}$ . Il segno della velocità è sempre uguale al segno dello spostamento  $\Delta x$ , poiché  $\Delta t$  è sempre positivo. Il rapporto  $\Delta x / \Delta t$  (*rapporto incrementale*) è una misura della pendenza del tratto rettilineo del grafico di  $x$  in funzione di  $t$ ; ed è detto *pendenza* o *coefficiente angolare* della retta. È importante notare che in fisica il termine «pendenza» ha un significato diverso rispetto alla geometria. In geometria la pendenza di una retta è una grandezza adimensionale e indica la tangente trigonometrica dell'angolo che la retta forma con l'asse  $x$  in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $xOy$ . (Si chiama invece *inclinazione* l'angolo che la retta forma con l'asse  $x$ .)

In fisica la pendenza è, per definizione, il rapporto tra due grandezze che frequentemente sono dimensionate e quindi può essere una grandezza dimensionata. La rappresentazione cartesiana di una retta con una data pendenza dipende dalle scale sui due assi.

Quando si ha a che fare con il rapporto fra due variazioni, come accade quando si determina una velocità, è sottinteso che la variazione nel numeratore «avviene durante» l'intervallo rappresentato dal denominatore. Perciò  $v = \Delta x / \Delta t$  (che si legge « $v$  uguale a delta  $x$  su delta  $t$ ») significa «per trovare la velocità, si prende la variazione della posizione  $\Delta x$  e si divide per quell'intervallo di tempo  $\Delta t$  durante il quale è avvenuta».

Talvolta si presenta la necessità di convertire un valore della velocità da un'unità di misura in un'altra. Questa operazione richiede un po' di attenzione, in particolare quando vengono convertite sia l'unità di lunghezza che l'unità di tempo. Per esempio data la velocità di 25 cm/s, qual è il suo valore in metri al minuto? Si ha: 25 cm = 0.25 m; 1 s = 1/60 min. Perciò:

$$25 \text{ cm/s} = \frac{25 \text{ cm}}{1 \text{ s}} = \frac{0.25 \text{ m}}{1/60 \text{ min}} = 0.25 \times 60 \text{ m/min} = 15 \text{ m/min}$$

## Quesiti

- 9.7. Esprimete le seguenti velocità in km/h e fornite alcuni esempi di oggetti che possono muoversi con tali velocità. (a) 1 m/s (b) 10 m/s (c) 25 m/s (d) 250 m/s (e) 8000 m/s.
- 9.8. Individuate i tratti del grafico di Fig. 9.5 nei quali il moto è uniforme, e determinate la velocità dell'oggetto in questi intervalli.
- 9.9. Calcolate le pendenze dei grafici di Fig. B. In ciascun caso specificate le unità di misura.

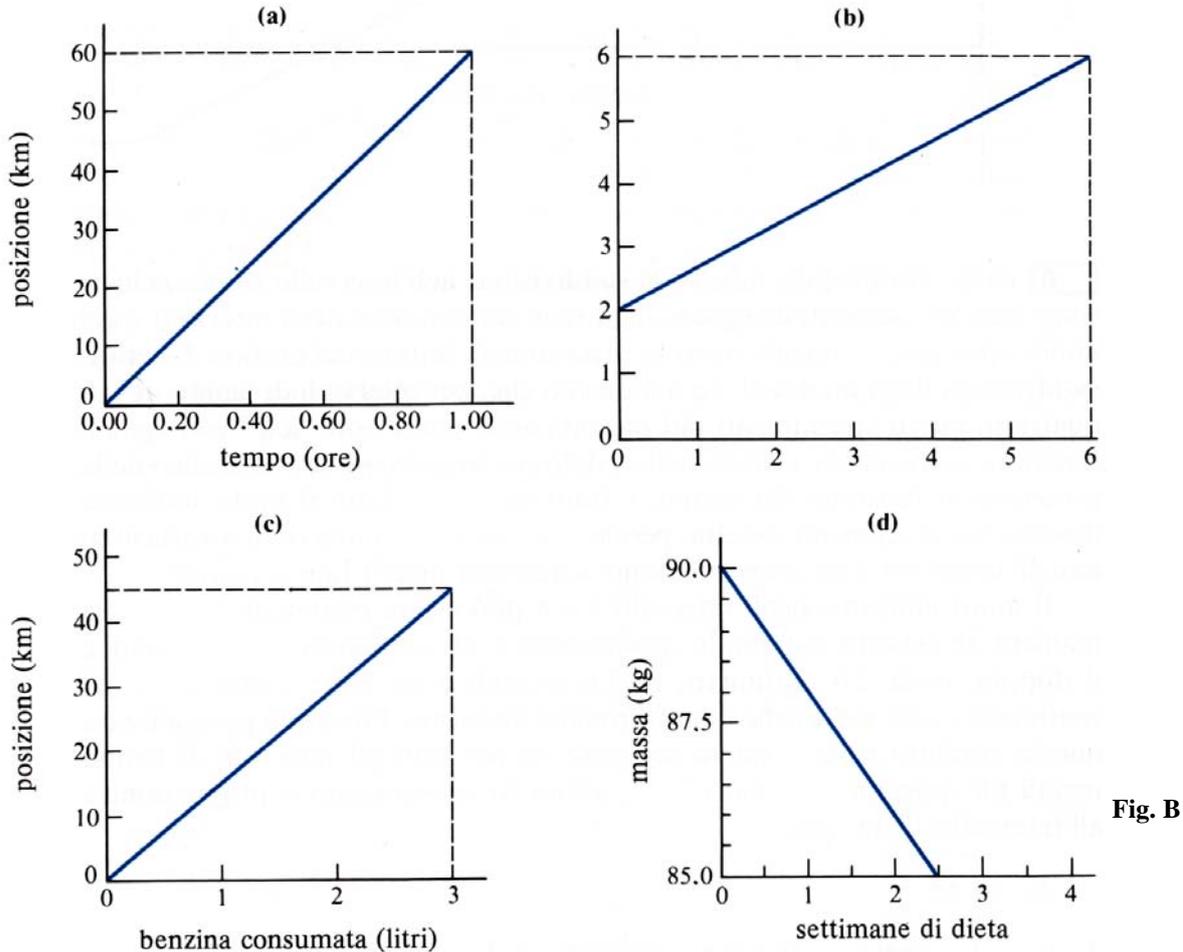


Fig. B

## 9.4. Velocità istantanea

Si è visto che nel caso del moto uniforme la variazione della posizione, cioè, lo spostamento, è proporzionale alla variazione del tempo; ma la maggior parte dei moti non è uniforme, e quindi il grafico della posizione in funzione del tempo non contiene tratti rettilinei.

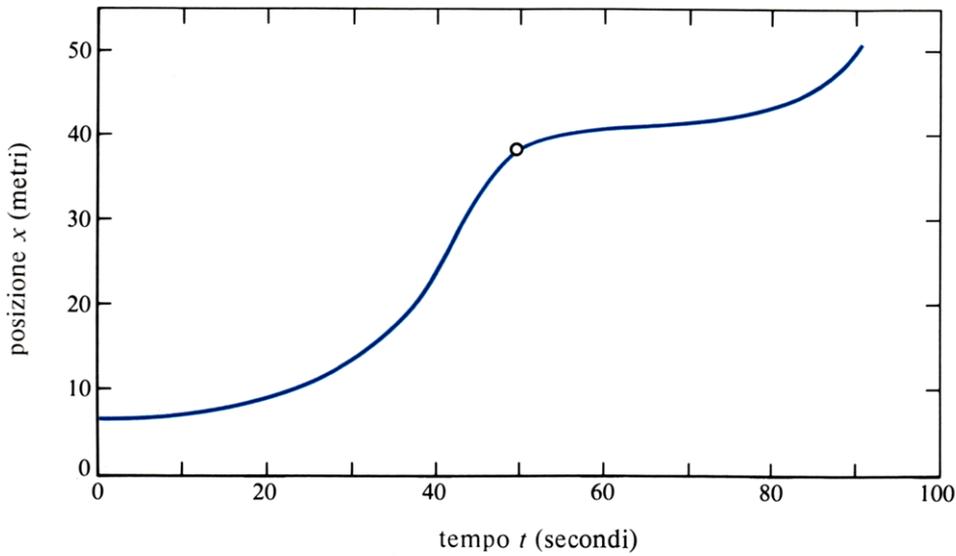
Esiste un modo per valutare con quali velocità si muove un oggetto il cui moto non è uniforme?

Consideriamo il grafico tempo-posizione mostrato in Fig.9.7. Con quale velocità si muove l'oggetto nell'istante  $t = 50$  s? Il moto nell'intorno di quell'istante non è uniforme, come si può vedere dal fatto che il grafico è dato da una linea curva. Ma osservando con una lente d'ingrandimento la parte di grafico compresa fra  $t = 45$  s e  $t = 50$  s (Fig.9.8), si vede che la parte ingrandita del grafico è più rettilinea dell'intero grafico, perché è solo una piccola porzione di esso.

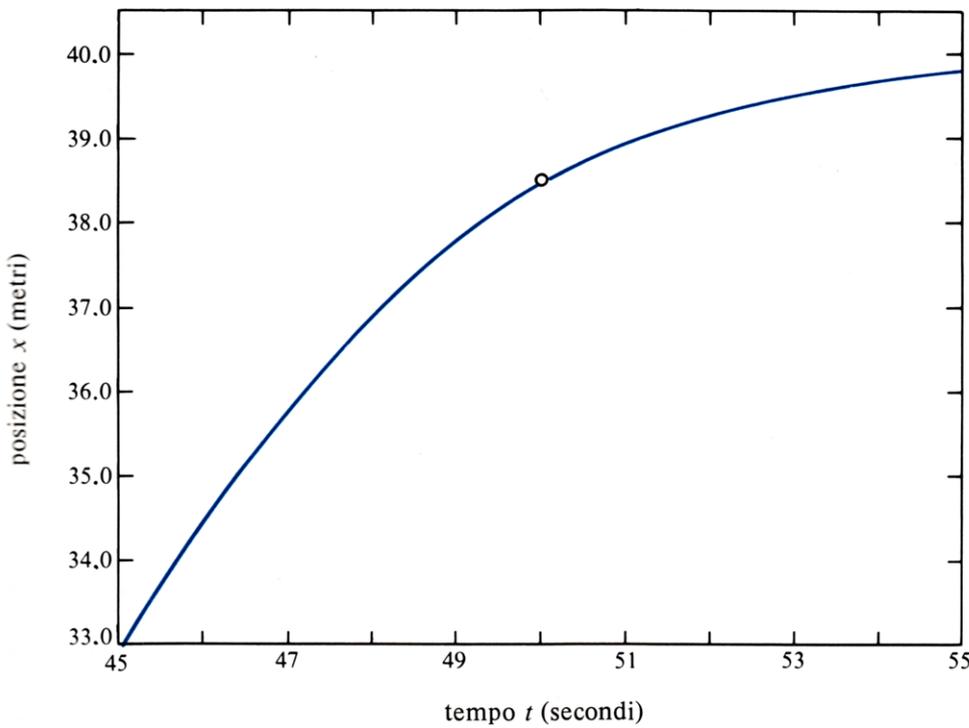
Un ingrandimento ancora maggiore mostra l'intervallo che si estende solo 0.5 s prima e dopo l'istante 50 s (Fig.9.9). In questo piccolo intervallo di tempo la linea è quasi retta e si può trovare la velocità misurando la pendenza di questa linea «retta». Scegliendo nella Fig.9.9 due punti, 1 e 2, vicini al punto corrispondente all'istante 50 s, e leggendo sul grafico, si trova:

$$t_1 = 49.86 \text{ s}; \quad x_1 = 38.42 \text{ m};$$

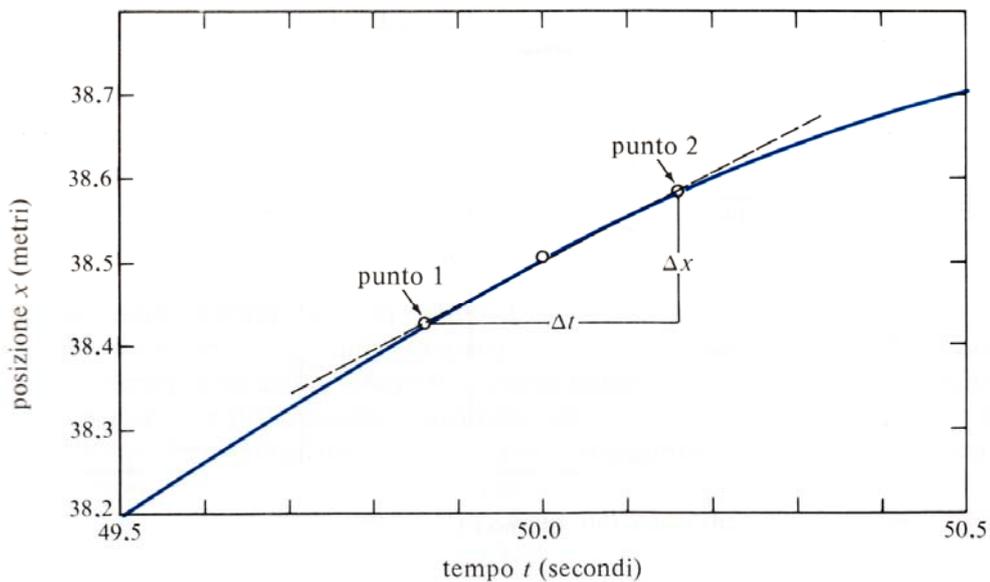
$$t_2 = 50.16 \text{ s}; \quad x_2 = 38.58 \text{ m}.$$



**Fig. 9.7.** Grafico tempo-posizione di un oggetto la cui velocità varia continuamente.



**Fig. 9.8.** In questa figura, parte del grafico di Fig. 9.7 è ingrandita.



**Fig. 9.9.** Con un ingrandimento 100, una piccolissima porzione del grafico di Fig. 9.7 appare quasi rettilinea.

Quindi, la pendenza è data da

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{+0.16 \text{ m}}{+0.30 \text{ s}} \cong +0.53 \text{ m/s} \quad [9.4]$$

La velocità nel punto in cui l'oggetto giunge 50 s dopo la partenza è molto vicina a 0.53 m/s, nel verso positivo.

La parte ingrandita di un grafico appare più rettilinea dell'intero grafico perché nell'immagine ingrandita osserviamo solo una piccola porzione del grafico non ingrandito. Ingrandendo abbastanza, osserveremo solo un piccolo intervallo di  $x$  e di  $t$ . Perciò, calcolando il rapporto:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad [9.5]$$

per una coppia di punti 1 e 2 molto vicini fra loro, troviamo in effetti la pendenza di una piccola porzione della curva. I punti che usiamo debbono essere presi sufficientemente vicini fra loro in modo che la parte di grafico compresa fra essi sia sostanzialmente identificabile con una retta.

Quando il tratto di grafico considerato è molto prossimo a una retta, troviamo all'incirca la stessa pendenza, e quindi la stessa velocità, qualunque sia la coppia di punti che abbiamo scelto. In Fig.9.9, per esempio, se si spostano i punti 1 e 2 lungo la curva in modo che risultino più vicini al punto corrispondente a 50 s, si ottiene, come è facile verificare, all'incirca lo stesso risultato di prima. Inoltre, i punti usati per trovare  $\Delta x/\Delta t$  saranno tanto più vicini tra loro quanto più  $\Delta t$  è piccolo; e se  $\Delta t$  è sufficientemente piccolo,  $\Delta x/\Delta t$  non varierà molto nell'intorno di un dato punto di un grafico tempo-posizione pressoché rettilineo. Si dice perciò che la velocità in un determinato istante, o *velocità istantanea*, è data dal limite di  $\Delta x/\Delta t$  quando  $\Delta t$  «tende a zero», cioè quando  $\Delta t$  diventa sempre più piccolo. In simboli, questa asserzione si scrive:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad [9.6]$$

(Il simbolo «lim» si legge «limite per  $\Delta t$  tendente a zero di ...»). Con la parola «limite» s'intende qui il risultato che si ottiene prendendo  $t_1$  e  $t_2$  così vicini fra loro che usando un intervallo ancora più piccolo compreso fra  $t_1$  e  $t_2$ , non si abbia una variazione apprezzabile del valore del rapporto.

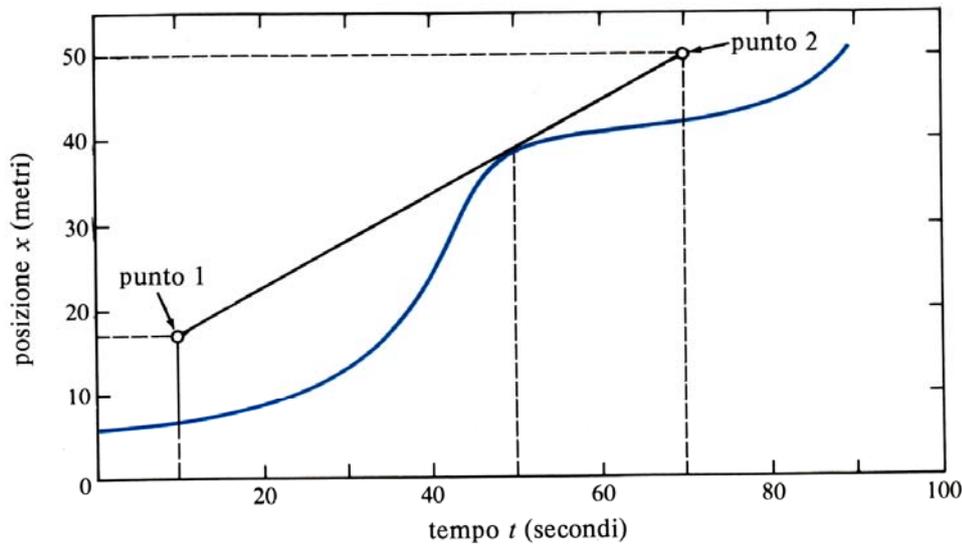
Per chiarire meglio il concetto di velocità istantanea abbiamo usato un'immagine ingrandita del grafico tempo-posizione. Esiste un metodo più semplice per ottenere la velocità senza dovere ricorrere al procedimento dell'ingrandimento? La risposta è affermativa: tracciate la tangente alla curva nel punto considerato e misuratene la pendenza. Immaginate di tracciare la tangente alla curva di Fig.9.7 nel punto per cui  $t = 50$  s, come si vede in Fig.9.10. In questa figura possiamo facilmente distinguere la tangente dalla curva che rappresenta il grafico di  $x$  in funzione di  $t$ ; ma con un ingrandimento pari a cento volte quello di Fig.9.11 vediamo che la tangente e la curva sono a stento distinguibili in un intervallo abbastanza piccolo intorno al punto di tangenza. In questo intervallo la pendenza è la stessa sia per la curva sia per la tangente; possiamo perciò usare la pendenza della tangente per determinare la pendenza della curva in un punto qualsiasi del grafico. La Fig.9.10 ci mostra come possiamo usare questo metodo per ottenere la velocità dell'oggetto nell'istante  $t = 50$  s. Anzitutto tracciamo la tangente alla curva nel punto scelto, poi scegliamo sulla tangente due punti convenienti (contrassegnati 1 e 2), leggiamo i valori di  $x_1$  e  $x_2$  e di  $t_1$  e  $t_2$  e calcoliamo  $x_2 - x_1 = +32$  m e  $t_2 - t_1 = 60$  s; la pendenza è allora:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{+32 \text{ m}}{60 \text{ s}} = +0.53 \text{ m/s} \quad [9.7]$$

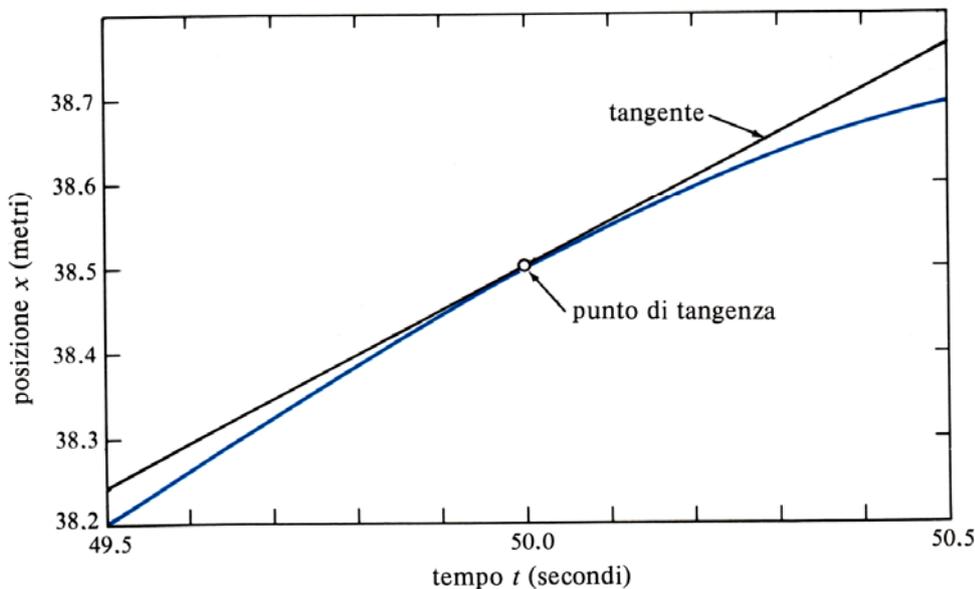
Perciò, all'istante  $t = 50$  s l'oggetto ha una velocità istantanea di 0.53 m/s. Usiamo la parola «istantanea» per distinguere la velocità in un dato istante dalla *velocità media* in un dato intervallo di tempo. La velocità media nell'intervallo di tempo  $\Delta t$  è, per definizione,

$$v_{\text{media}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad [9.8]$$

Graficamente, è la pendenza della retta passante per i due punti del grafico tempo-posizione corrispondenti agli estremi dell'intervallo di tempo  $\Delta t$  (si veda la Fig.9.12). La velocità media è quella velocità costante secondo la quale la posizione varierebbe della quantità effettiva  $\Delta x$  nell'intervallo di tempo effettivo  $\Delta t$ .



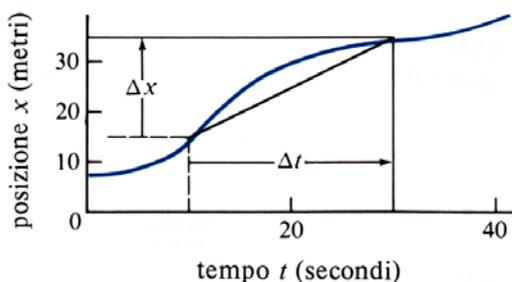
**Fig. 9.10.** Per trovare la velocità in un dato istante, tracciare la tangente nel punto corrispondente. Considerando due punti qualunque della tangente, trovare la sua pendenza. Il valore di questa è quello della velocità.



**Fig. 9.11.** Ingrandendo 100 volte la Fig. 9.10, la curva e la tangente si confondono nell'intorno del punto di tangenza.

In generale, il valore della velocità media dipende dall'intervallo di tempo  $\Delta t$  considerato. In Fig.9.10, la velocità media durante l'intervallo di tempo fra 0 s e 60 s non è uguale alla velocità media durante l'intervallo di tempo fra 40 s e 60 s.

Se, durante l'intervallo di tempo  $\Delta t$ , la velocità istantanea subisce una variazione apprezzabile, differirà quasi in ogni istante dalla velocità media in quell'intervallo: in alcuni istanti può essere maggiore della velocità media, in altri minore. Le due velocità coincidono solo negli istanti in cui la tangente alla curva che rappresenta il grafico tempo-posizione è parallela alla retta che rappresenta la velocità media. Per esempio, nel grafico di Fig.9.12 coincidono solo nell'istante  $t = 18$  s. Solo nel caso del moto uniforme la velocità istantanea è uguale, in ogni istante, alla velocità media. In questo caso, grande o piccolo che sia l'intervallo di tempo considerato, la velocità media sarà sempre la stessa.



**Fig. 9.12.** La pendenza della retta è uguale a  $v_{media} = \Delta x / \Delta t$ .

## Quesiti

- 9.10.** Individuate tutti i punti del grafico di Fig. 9.5 nei quali la velocità istantanea è nulla.
- 9.11.** Il grafico tempo-posizione di un'automobile è mostrato nella Fig. C.
- In quale istante l'automobile ha la velocità massima?
  - Quale valore ha la velocità in quell'istante?
  - Quale valore ha la velocità nell'istante  $t = 0.70$  h?
  - Qual è il valore della velocità media durante le prime 0.70 ore?
- 9.12.** Qual è il valore della velocità media durante i primi 90 s nel moto rappresentato nel grafico di Fig.9.10?
- 9.13.** Un treno viaggia a 95 km/h per 0.52 ore, a 50 km/h nelle successive 0.24 ore, e quindi a 100 km/h per 0.71 ore. Qual è il valore della velocità media?

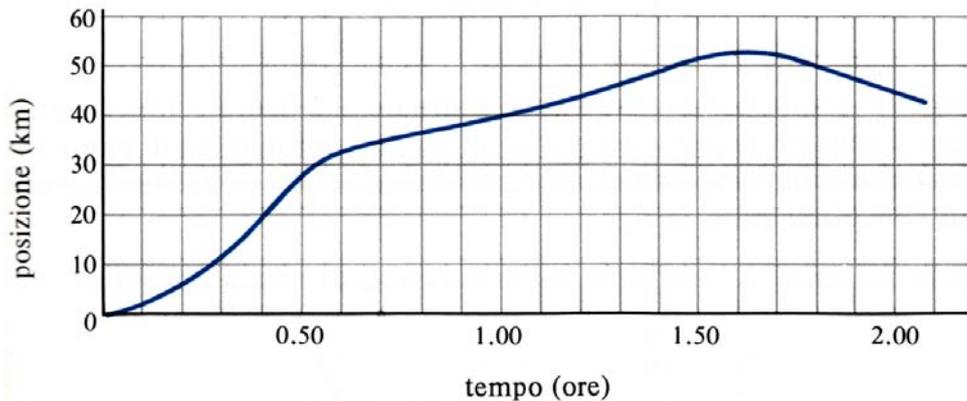
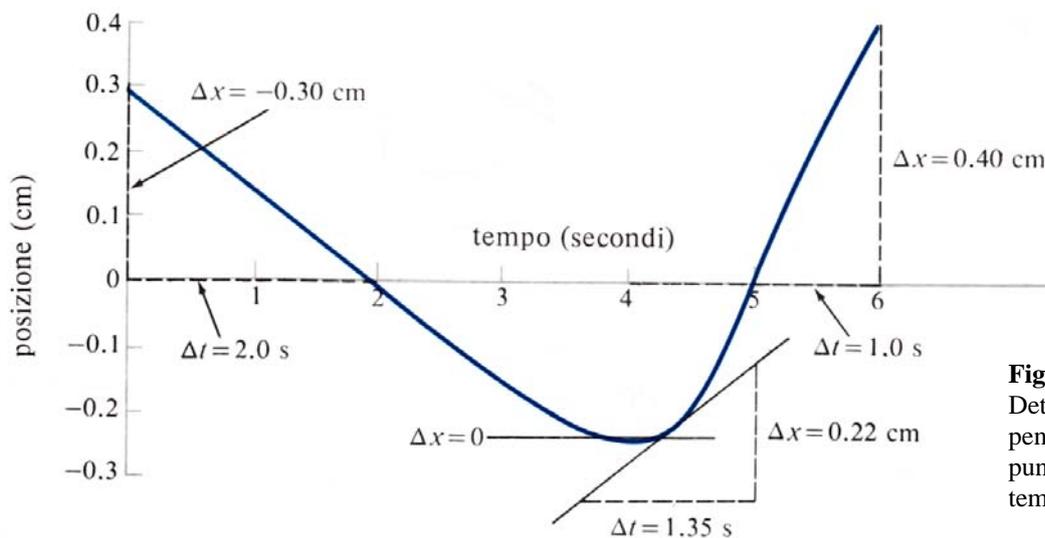


Fig. C

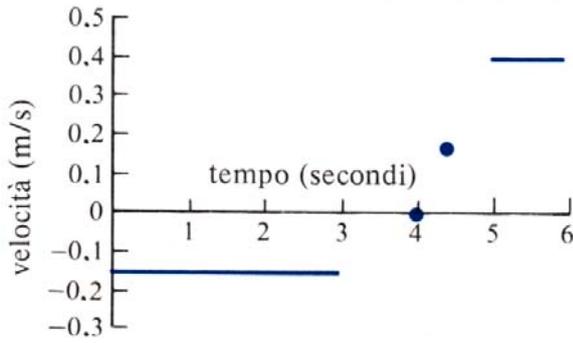
## 9.5. Come si ricavano i grafici tempo-velocità dai grafici tempo-posizione

Ora che abbiamo appreso come ricavare da un grafico della posizione in funzione del tempo la velocità di un oggetto in moto, possiamo usare questa conoscenza per disegnare grafici della velocità partendo da grafici della posizione in funzione del tempo. Come esempio, consideriamo il grafico rappresentato in Fig.9.13. Fra  $t = 0$  s e circa  $t = 3$  s il moto è uniforme e si può misurare direttamente la pendenza in un punto qualsiasi. Fra  $t = 3$  s e  $t = 5$  s la velocità è variabile e quindi dovremo tracciare le tangenti in diversi punti e misurarne le pendenze. Dopo  $t = 5$  s il grafico è di nuovo rettilineo e si può di nuovo misurare direttamente la pendenza in un punto qualsiasi. Il valore più piccolo della velocità si trova all'inizio ed è  $\Delta x/\Delta t = -0.30 \text{ m}/2.0 \text{ s} = -0.15 \text{ m/s}$ . Il valore più grande si trova alla fine e vale  $\Delta x/\Delta t = +0.40 \text{ m}/1.0 \text{ s} = +0.40 \text{ m/s}$ .

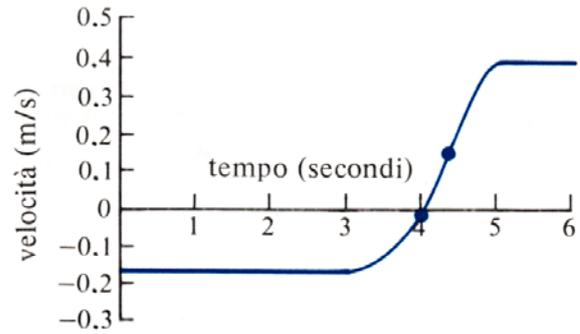
Scegliendo la scala per l'asse delle velocità in maniera tale da contenere il valore massimo e quello minimo ricavati prima, si può cominciare a disegnare il grafico di  $v$  in funzione di  $t$  com'è mostrato in



**Fig. 9.13.** Determinazione della pendenza in diversi punti di un grafico tempo-posizione.



**Fig. 9.14.** Inizio della costruzione del grafico tempo-velocità- in base alle pendenze ricavate in Fig. 9.13.



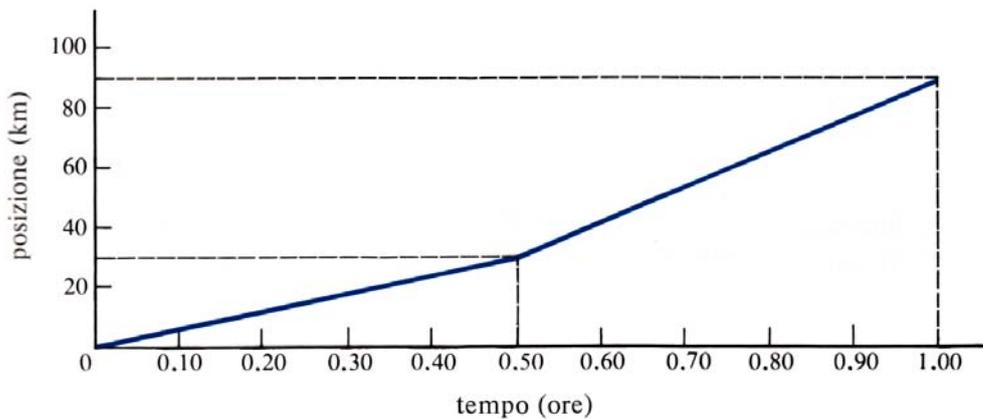
**Fig. 9.15.** Disegno grossolano del grafico completo iniziato in Fig. 9.14.

Fig.9.14. Il passo successivo dipende dal grado di precisione che deve avere il grafico. Se occorre un'elevata precisione, si deve ritornare alla Fig.9.13 e misurare la pendenza della parte curva del grafico in un maggior numero di punti; invece se è sufficiente una rappresentazione grossolana, si può completare il grafico a mano com'è mostrato in Fig.9.15.

Possiamo generalizzare il metodo usato nell'esempio precedente per costruire un grafico tempo-velocità partendo da un grafico tempo-posizione. Anzitutto occorre trovare il più grande e il più piccolo valore della velocità per determinare la scala per l'asse  $v$ , quindi si individuano i tratti del grafico in cui il moto è uniforme e si rappresentano i valori corrispondenti delle velocità costanti. Successivamente si rilevano tanti valori della velocità istantanea nella parte curva del grafico tempo-posizione quanti ne occorrono e si disegna la curva tempo-velocità.

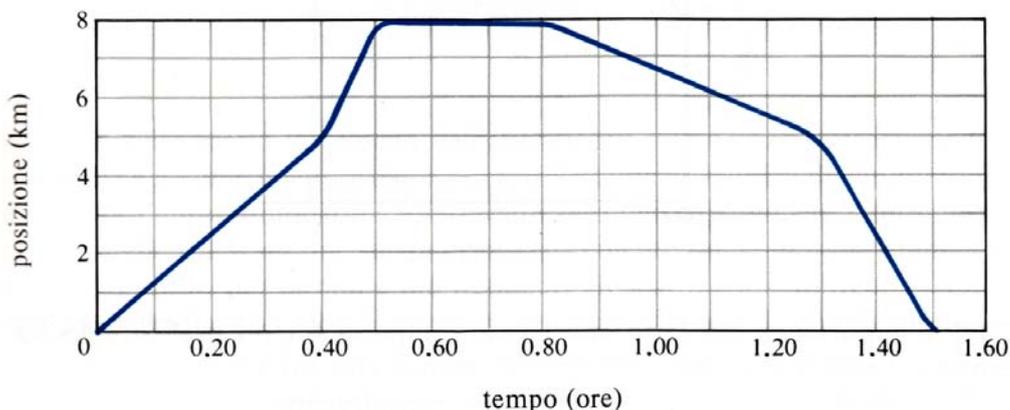
**Quesiti**

**9.14.** Il grafico tempo-posizione di un'automobile che viaggia lungo una strada è mostrato in Fig. D. Disegnate il grafico della sua velocità in funzione del tempo.



**Fig. D**

**9.15.** Susanna va in bicicletta, pedalando il più velocemente possibile, dalla propria casa a quella di Anna. Dopo una breve visita torna a casa, sempre pedalando il più velocemente possibile. Nella Fig. E è riportato il diagramma orario del suo viaggio. Costruite il diagramma della velocità in funzione del tempo.

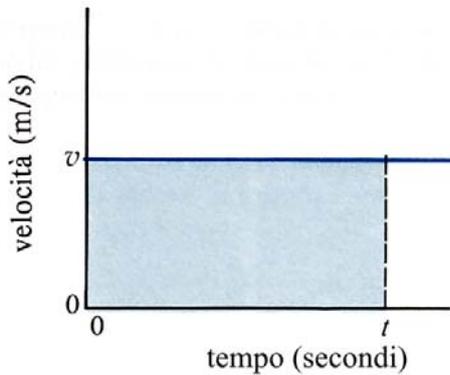


**Fig. E**

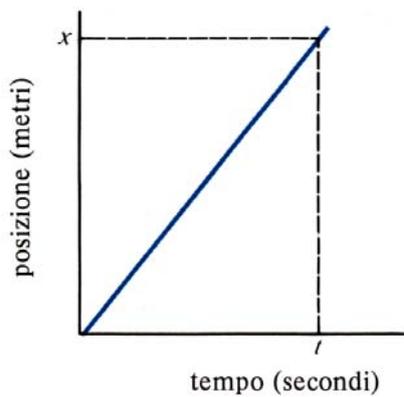
tempo per il viaggio di Susanna. In base alle informazioni ricevute e al diagramma, fornite una descrizione plausibile della strada tra la casa di Susanna e la casa di Anna.

**9.16.** Disegnate un grafico tempo-velocità per l'oggetto il cui grafico tempo-posizione è rappresentato in Fig. 9.5.

**9.6. Come si ricava lo spostamento dai grafici tempo-velocità**



**Fig. 9.16.** L'area ombreggiata è data dal prodotto  $v \cdot t$ .



**Fig. 9.17.** Grafico di  $x = v \cdot t$

Per determinare la velocità di un'automobile in moto (purché si muova solo in avanti) in funzione del tempo, si può usare il tachimetro dell'automobile e un orologio. Possiamo rappresentare tali dati in un grafico della velocità in funzione del tempo. Come possiamo usare tale grafico per ottenerne uno che rappresenti la posizione in funzione del tempo? Risponderemo a questo quesito per gradi: prima considereremo il caso del moto con velocità costante e poi quello del moto con velocità variabile. Nel caso del moto con velocità costante lo spostamento, o variazione della posizione, è proporzionale alla variazione del tempo:

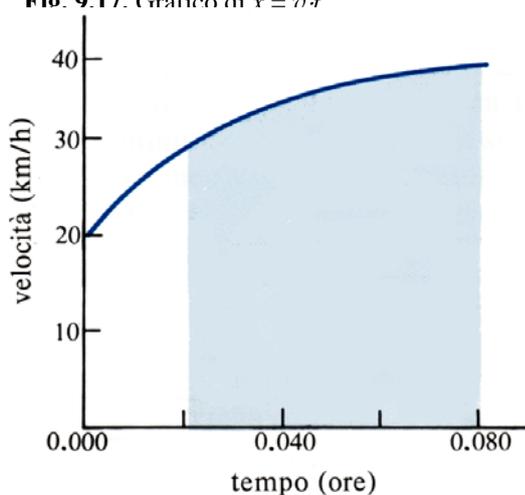
$$\Delta x = v \cdot \Delta t \quad [9.9]$$

In questo caso l'intervallo di tempo  $\Delta t$  è semplicemente il tempo trascorso dall'inizio del moto:  $\Delta t = t - t_0$ . Possiamo azzerare l'orologio all'inizio del moto; quindi sarà  $t_0 = 0$ , e  $\Delta t = t$ . In maniera analoga,  $\Delta x = x - x_0$ , dove  $x_0$  è la posizione dell'oggetto nell'istante  $t = 0$ . Scegliendo come origine dell'asse coordinato la posizione dell'oggetto nell'istante  $t = 0$ , risulta  $x_0 = 0$  e la relazione [9.9] diventa:

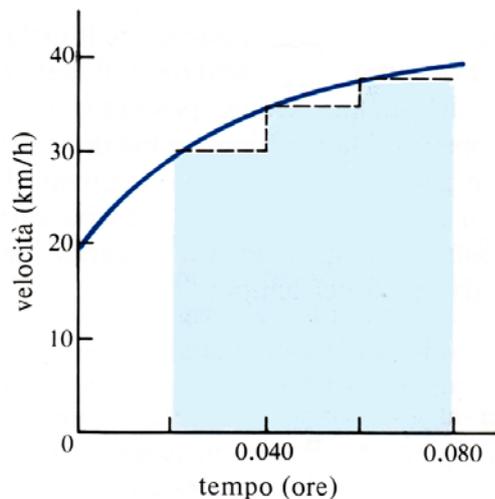
$$x = v \cdot t \quad [9.10]$$

A parole, nel caso di un moto uniforme che inizia nell'origine dell'asse coordinato, la posizione in un istante qualsiasi è data dal prodotto della velocità per il tempo.

Il grafico tempo-velocità relativo a una velocità costante  $v$  è una retta parallela all'asse  $t$  (Fig. 9.16). In ogni istante, il prodotto  $v \cdot t$  è rappresentata dall'«area» del rettangolo compreso fra il grafico e l'asse orizzontale. La parola «area» è stata messa fra

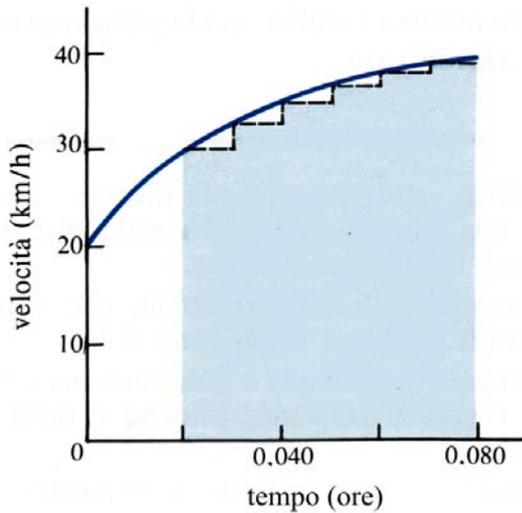


**Fig. 9.18.** Grafico tempo-velocità per un'automobile che sta accelerando.

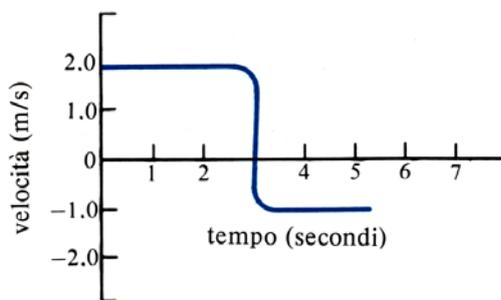


**Fig. 9.19.** Lo spostamento dell'automobile rappresentato in Fig. 9.18 può essere approssimato mediante quello di un'automobile immaginaria che viaggia con velocità diverse da quelle dell'automobile reale, com'è mostrato in questa figura.

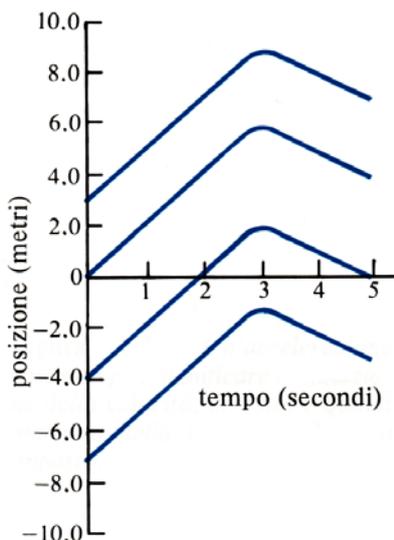
virgolette poiché la base del rettangolo espressa in secondi e l'altezza in metri/secondo; perciò l'«area» è espressa in  $(m/s) \cdot s = m$  e non in  $m^2$  come accade in geometria. Se la velocità fosse espressa in chilometri/ora



**Fig. 9.20.** Se l'automobile immaginaria di Fig. 9.19 varia la propria velocità a intervalli di tempo più piccoli, il suo moto approssima meglio quello dell'automobile reale.



**Fig. 9.21.** Fra  $t = 3.0$  s e  $t = 5.0$  s la velocità è negativa. Perciò, in questa regione, l'area fra la curva e l'asse dei tempi rappresenta uno spostamento negativo.



**Fig. 9.22.** I moti descritti dai quattro grafici differiscono solo per la posizione iniziale dell'oggetto. Tutti e quattro i grafici danno il grafico tempo-velocità rappresentato in Fig. 9.21.

0, cioè dobbiamo conoscere la *posizione iniziale*. Per esempio, tutti e quattro i grafici tempo-posizione mostrati in Fig. 9.22 corrispondono al grafico tempo-velocità mostrato in Fig. 9.21. Gli spostamenti durante

e il tempo in ore, l'«area» sarebbe espressa in chilometri e non in  $(\text{chilometri})^2$ . Dall'area del rettangolo per vari valori di otteniamo i valori corrispondenti di  $x$ , e in base a questi valori possiamo disegnare un grafico della posizione in funzione del tempo. Nel caso particolare della velocità costante si farebbe un lavoro inutile perché si può disegnare direttamente il grafico relativo alla [9.10] (Fig. 9.17).

L'importanza del fatto che l'area compresa fra un grafico tempo-velocità e l'asse  $x$  è uguale allo spostamento è che ciò vale per qualunque grafico tempo-velocità. Per accertarsene, consideriamo il grafico tempo-velocità per una automobile reale che aumenta la propria velocità (Fig. 9.18). Si può ottenere una buona approssimazione del grafico di Fig. 9.18 mediante il «grafico a gradini» di Fig. 9.19. Questo grafico rappresenta il moto di un'automobile immaginaria che parte dalla stessa posizione da cui parte l'automobile reale, ma ha una velocità che varia «a scatti». All'inizio di ciascuno scatto, la velocità dell'automobile immaginaria è uguale a quella dell'automobile reale; ma, mentre la velocità dell'automobile immaginaria resta costante fra due scatti successivi, quella dell'automobile reale aumenta, e quindi l'automobile reale si allontana sempre più da quella immaginaria.

Alla fine dello scatto la velocità dell'automobile immaginaria cresce istantaneamente e assume il valore che ha in quell'istante la velocità dell'automobile reale. Ma l'automobile immaginaria non può mai raggiungere l'automobile reale, perché quest'ultima viaggia più velocemente quasi in ogni istante. Se rendiamo molto più piccoli e più frequenti gli scatti, come in Fig. 9.20, le velocità delle due automobili differiranno sempre di meno, e quindi l'automobile reale non sopravvanzerà mai di molto quella immaginaria. L'area ombreggiata, che ci dà lo spostamento dell'automobile immaginaria durante l'intervallo di tempo considerato, poiché è formata solo da rettangoli, corrispondenti a tratti percorsi con velocità costante, fornirà anche con buona approssimazione lo spostamento dell'automobile reale durante lo stesso intervallo di tempo. Quest'area ombreggiata, quando si considerano un gran numero di scatti, è in pratica l'area ombreggiata che sta al di sotto del grafico di Fig. 9.18 riferito all'automobile reale. Si vede perciò che lo spostamento dell'automobile reale è dato dall'area situata sotto il grafico della velocità in funzione del tempo.

Nel calcolare l'area compresa fra una curva tempo-velocità e l'asse  $t$  si deve ricordare che quando  $v$  è negativa anche il prodotto  $v \cdot \Delta t$  è negativo. Perciò, per tratti di una curva tempo-velocità che giacciono al di sotto dell'asse  $t$ , l'area è negativa. Per trovare lo spostamento totale, le aree parziali devono essere sommate tenendo conto del loro segno (Fig. 9.21).

Infine, l'area compresa fra un grafico tempo-velocità e l'asse  $t$  fornisce solo lo spostamento, o variazione di posizione, dell'oggetto in moto in funzione del tempo. Per riuscire a trovare la posizione in funzione del tempo dobbiamo sapere dove si trovava l'oggetto nell'istante  $t =$

ogni intervallo di tempo sono uguali per tutti e quattro i grafici, ma la posizione nei diversi istanti di tempo è diversa in ciascun caso.

### Quesiti

- 9.17. Disegnate un grafico tempo-velocità per un treno che fa la spola fra le città A e C con una fermata intermedia nella città B. Tutte le città si trovano lungo una traiettoria rettilinea.
- 9.18. Qual è lo spostamento di un'automobile che viaggia alla velocità costante di 60 km/h (a) per 3 h, (b) per 1/2 h?
- 9.19. Un uomo va all'angolo della strada a imbucare una lettera e poi ritorna a casa. Disegnate i grafici della sua velocità e della sua posizione in funzione del tempo.
- 9.20. Un treno aumenta la propria velocità come mostra il grafico tempo-velocità di Fig. F. Quale distanza percorre nei primi sei minuti?

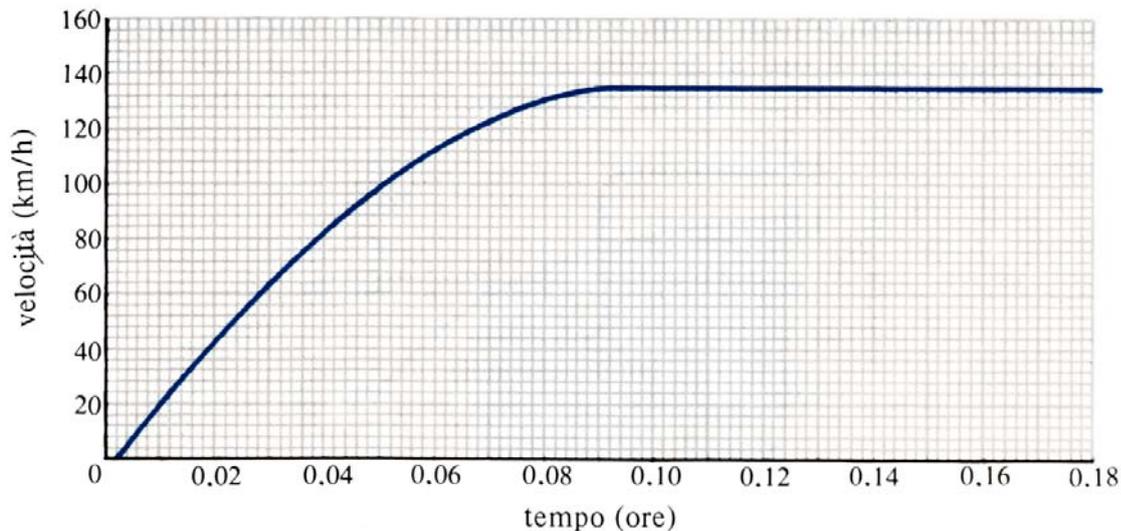


Fig. F

### 9.7. Accelerazione

Un guidatore potrebbe dire che la sua automobile può raggiungere la velocità di 80 km/h in 10 s, con partenza da fermo. Con queste parole parlerebbe dell'accelerazione della sua automobile cioè ci direbbe quanto rapidamente questa è in grado di variare la propria velocità. In genere si esprime l'accelerazione, cioè la rapidità con cui varia la velocità, come la variazione della velocità che avviene in un secondo. In questi termini, un'automobile che raggiunge la velocità di 80 km/h in 10 s ha un'accelerazione media di 8 km/h al secondo.

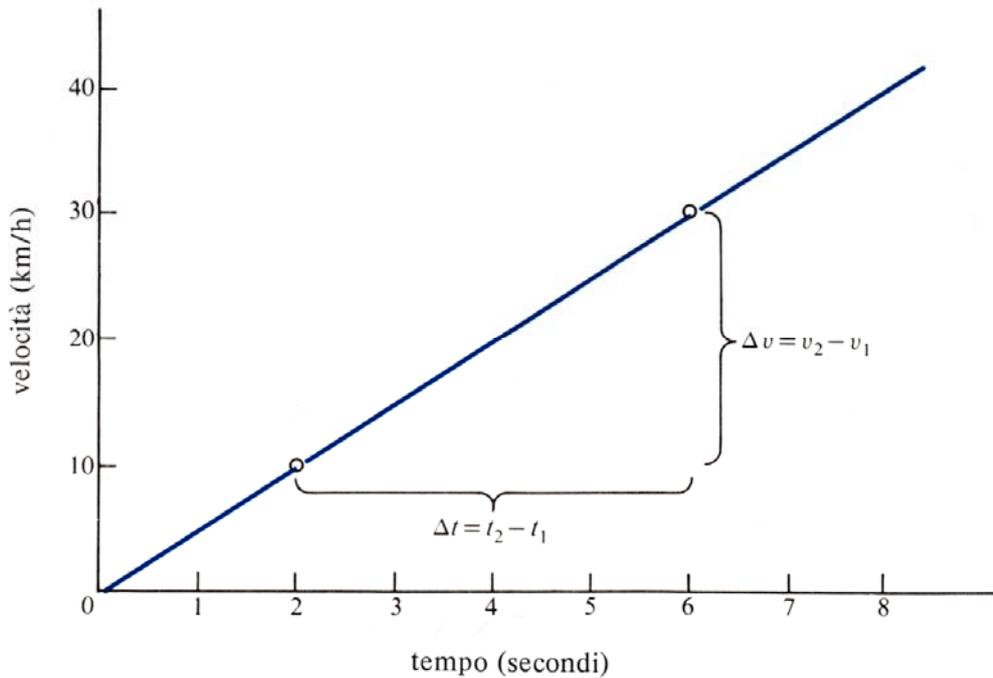
Proprio come la pendenza di un grafico tempo-spostamento dà una misura della rapidità con cui varia lo spostamento, la pendenza di un grafico tempo-velocità dà una misura della rapidità con cui varia la velocità, cioè una misura dell'accelerazione.

Consideriamo il grafico tempo-velocità relativo ad un'automobile, come mostrato in Fig. 9.23. Poiché il grafico è lineare la variazione della velocità è proporzionale alla lunghezza dell'intervallo di tempo:

$$\Delta v = a \cdot \Delta t \quad [9.11]$$

La costante di proporzionalità  $a$  è l'accelerazione, ed è data dalla pendenza  $a = \Delta v / \Delta t$ . L'unità di misura dell'accelerazione dipende dalle unità di misura usate per esprimere la variazione della velocità e l'intervallo di tempo durante il quale avviene questa variazione di velocità. Per esempio, in Fig. 9.23 la velocità è misurata in chilometri all'ora e l'intervallo di tempo in secondi; perciò:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20 \text{ km/h}}{4.0 \text{ s}} = \frac{5.0 \text{ km/h}}{1 \text{ s}} = 5.0 \frac{\text{km}}{\text{h} \cdot \text{s}} \quad [9.12]$$



**Fig. 9.23.** Grafico tempo-velocità con pendenza costante.

In un kilometro vi sono  $10^3$  m ed in un'ora  $3.6 \times 10^3$  s. Se i tachimetri fossero costruiti in modo tale da misurare la velocità in metri al secondo, invece di 20 km/h leggeremmo  $\frac{20 \times 1.0 \times 10^3 \text{ m}}{3.6 \times 10^3 \text{ s}} = 5.6 \text{ m/s}$ , e l'accelerazione sarebbe  $\frac{5.6 \text{ m/s}}{4.0 \text{ s}} = \frac{1.4 \text{ m/s}}{\text{s}} = 1.4 \frac{\text{m}}{\text{s} \cdot \text{s}} = 1.4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

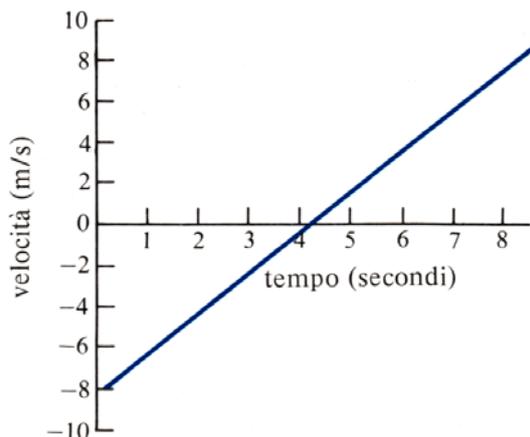
Qualunque siano le unità di misura usate, un'accelerazione è sempre espressa in  $\frac{\text{lunghezza}}{(\text{tempo}) \cdot (\text{tempo})}$ .

Poiché  $\Delta t$  è sempre positivo, il segno di  $a$  sarà di conseguenza sempre uguale a quello di  $\Delta v$ . In Fig.9.24,  $\Delta v$  è sempre positivo; quindi l'accelerazione è positiva, anche se nell'istante  $t = 0$  s l'oggetto si muoveva più velocemente che nell'istante  $t = 2.0$  s, e nell'istante  $t = 4.0$  s era temporaneamente fermo. Il fatto non sembrerà tanto strano, se si considera che prima dell'istante  $t = 4.0$  s l'oggetto si muoveva verso sinistra e la variazione della sua velocità fra  $t = 0$  s e  $t = 2.0$  s è stata

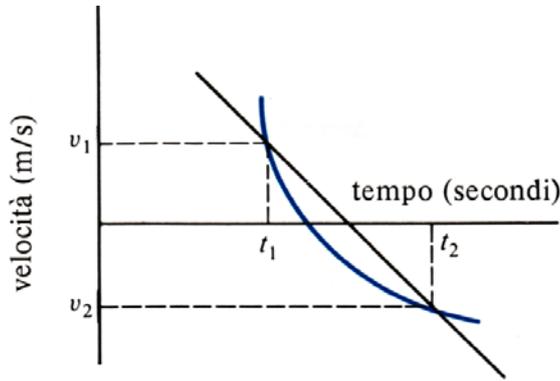
$$v_2 - v_1 = -4 \text{ m/s} - (-8 \text{ m/s}) = +4 \text{ m/s}. \quad [9.13]$$

Un'accelerazione positiva può significare un aumento di velocità, se la velocità è positiva, o una diminuzione di velocità, se la velocità è negativa. Viceversa, un'accelerazione negativa può significare diminuzione della velocità, se la velocità è positiva, o aumento della velocità, se la velocità è negativa.

Per illustrare questo fatto, consideriamo che cosa accade quando si lancia una palla verso l'alto in direzione verticale. Appena lascia la mano, la palla comincia a rallentare e dopo aver raggiunto la massima altezza, comincia ad aumentare la propria velocità nel tragitto di ritorno. Scegliendo come positiva la direzione verso l'alto, risulta che la palla ha un'accelerazione negativa durante tutto il suo volo.



**Fig. 9.24.** Un'accelerazione costante può significare diminuzione della velocità, arresto, e quindi aumento della velocità nel verso opposto.



**Fig. 9.25.** L'accelerazione media

$$\text{fra } t_1 \text{ e } t_2 \text{ è } a_{\text{media}} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Qual è l'accelerazione di un oggetto quando il suo grafico tempo-velocità non è lineare (Fig. 9.25)? Possiamo definire l'accelerazione media fra  $t_1$  e  $t_2$  mediante l'espressione:

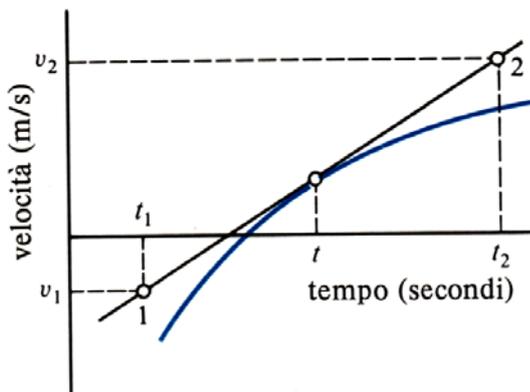
$$a_{\text{media}} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{9.14}$$

in analogia con la definizione di velocità media  $v_{\text{media}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ .

Estendendo questa analogia, possiamo definire l'accelerazione istantanea, nell'istante  $t$ , mediante l'espressione:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{9.15}$$

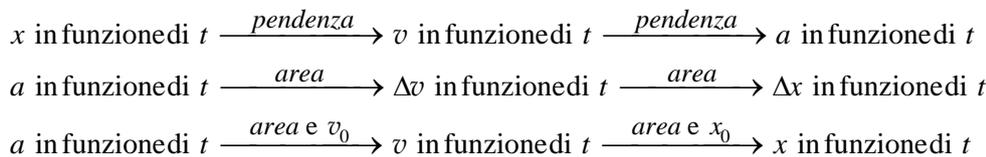
L'accelerazione istantanea può allora essere dedotta dalla pendenza della tangente al grafico tempo-velocità condotta nell'istante  $t$  (Fig. 9.26). Ricavando l'accelerazione istantanea in istanti differenti, possiamo disegnare un grafico dell'accelerazione in funzione del tempo.



**Fig. 9.26.** Per trovare l'accelerazione istantanea nell'istante  $t$ , disegnare la tangente al grafico e usare due punti convenienti per calcolarne la pendenza.

Si ricordi che la pendenza di un grafico tempo-posizione fornisce la velocità, e che la pendenza di un grafico tempo-velocità fornisce l'accelerazione. In maniera analoga, poiché l'area compresa fra una curva tempo-velocità e l'asse  $t$  fornisce la variazione della posizione, l'area compresa fra una curva tempo-accelerazione e l'asse  $t$  fornisce la variazione della velocità.

Per ricavare la posizione di un oggetto da un grafico tempo-velocità, dobbiamo conoscerne la posizione iniziale; non è infatti sufficiente la conoscenza della variazione della posizione che ricaviamo dall'area nel grafico tempo-velocità. Completando l'analogia fra velocità e accelerazione, per ricavare la velocità da un grafico tempo-accelerazione dobbiamo conoscere la velocità iniziale. Queste relazioni sono sintetizzate in Fig. 9.27.



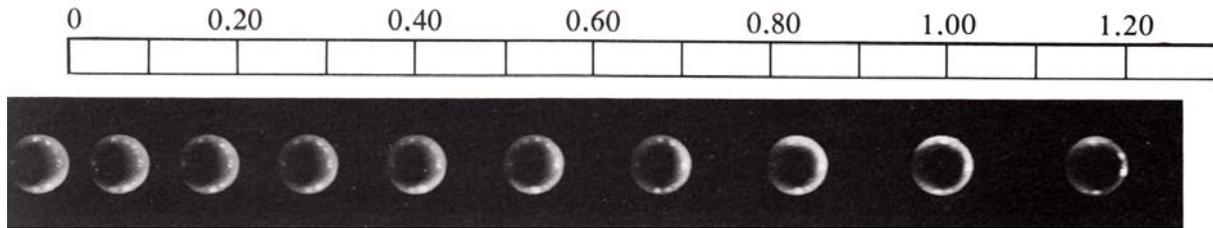
**Fig. 9.27.** Le relazioni fra posizione, velocità, e accelerazione in funzione del tempo.

**Quesiti**

**9.21.** Un'automobile che viaggia alla velocità di 30 km/h accelera fino a raggiungere i 90 km/h in 6.0 s. Qual è l'accelerazione media?

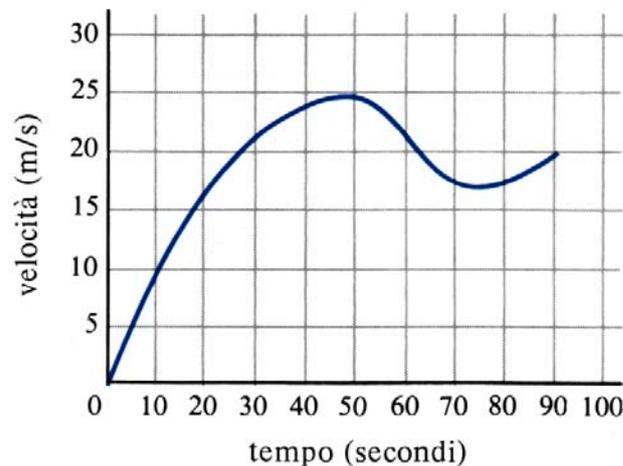
**9.22.** Esprimere un'accelerazione di  $1.0 \frac{\text{km}}{\text{h} \cdot \text{s}}$  in  $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

- 9.23.** La Fig. G rappresenta una serie di fotogrammi successivi di una palla in moto eseguita a intervalli di  $1/30$  di secondo. La palla si muove da sinistra a destra e lo zero della scala è allineato con il bordo destro dell'immagine della palla nella sua posizione iniziale.
- (a) Disegnare un grafico tempo-posizione per descrivere questo moto.
- (b) Mediante il grafico ottenuto in (a) costruire il grafico tempo-velocità.
- (c) Che cosa vi dice il grafico tempo-velocità a proposito dell'accelerazione della palla in moto?



**Fig. G.** La scala è rappresentata in metri.

- 9.24.** (a) In quali intervalli di tempo, nella Fig. H, l'accelerazione è positiva? (b) In quali è negativa? In quali istanti l'accelerazione è nulla?
- 9.25.** Dal grafico della velocità in funzione del tempo per un'automobile mostrato in Fig. H, ricavare il grafico dell'accelerazione in funzione del tempo.



**Fig. H**

## 9.8. Accelerazione costante: alcune relazioni utili

Un moto con accelerazione costante non è facilmente ottenibile, ma può servire come descrizione approssimata di moti con accelerazione quasi costante, moti che s'incontrano in molte situazioni. Risulterà perciò utile stabilire alcune relazioni fondamentali fra accelerazione costante, velocità, posizione, e tempo, in modo che possano essere consultate rapidamente.

Consideriamo un corpo che si muove con accelerazione costante  $a$ . In molti casi è possibile porre l'origine del grafico tempo-velocità e del grafico tempo-posizione all'inizio del moto, però questo non è sempre vero: considereremo allora il caso generale nel quale nell'istante  $t_0$  (si legge «ti con zero» oppure «ti zero») il corpo ha una velocità  $v_0$  ed una posizione  $x_0$  entrambe diverse da zero.

Durante l'intervallo di tempo  $\Delta t$ , la variazione di velocità corrisponderà all'area sotto la curva del grafico di  $a$  in funzione di  $t$  (Fig. 9.28) e cioè  $\Delta v = a \cdot \Delta t$ .

Sia  $v$  la velocità nell'istante  $t$ , si avrà  $\Delta v = v - v_0$  e quindi  $v - v_0 = a \cdot \Delta t$  oppure

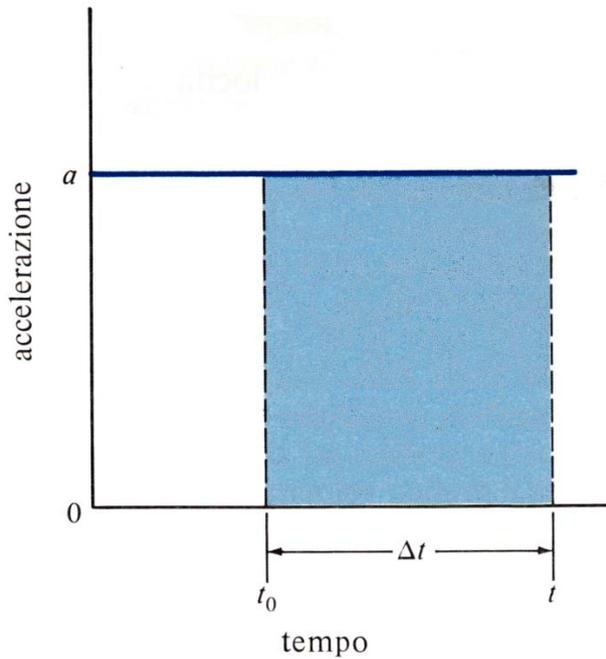
$$v = v_0 + a \cdot (t - t_0). \quad [9.17]$$

Il grafico di  $v$  in funzione di  $t$  è mostrato in Fig. 9.29. L'area sotto la curva di questo grafico corrisponde alla variazione di posizione, cioè allo spostamento  $\Delta x$ . Quest'area è composta da quella di un rettangolo e da quella di un triangolo, come è mostrato dalla diversa ombreggiatura:

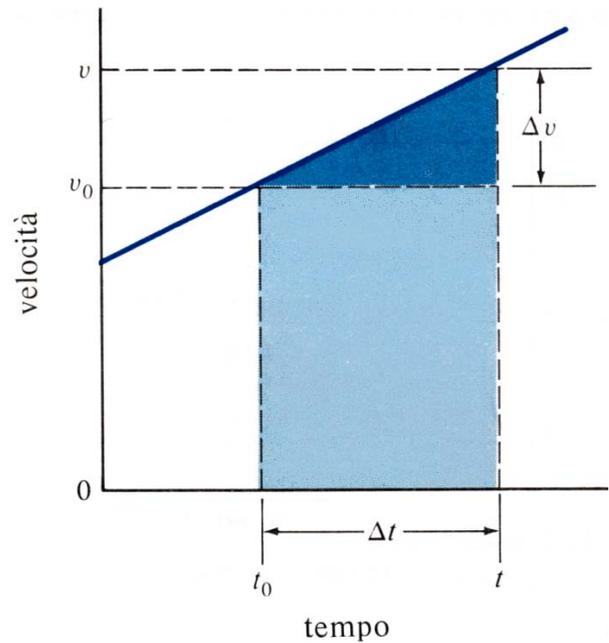
$$\text{Area del rettangolo} = v_0 \cdot \Delta t$$

$$\text{Area del triangolo} = \frac{1}{2}(\Delta v) \cdot (\Delta t) = \frac{1}{2} a \cdot (\Delta t)^2 \quad [9.18]$$

quindi



**Fig. 9.28.** Grafico di  $a$  in funzione di  $t$  in caso di accelerazione costante.



**Fig. 9.29.** Grafico di  $v$  in funzione di  $t$  in caso di accelerazione costante.

$$\Delta x = v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a \cdot (\Delta t)^2 \quad [9.19]$$

e ricordando che  $\Delta x = x - x_0$  e  $\Delta t = t - t_0$  si ottiene:

$$x - x_0 = v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a \cdot (t - t_0)^2 \quad [9.20]$$

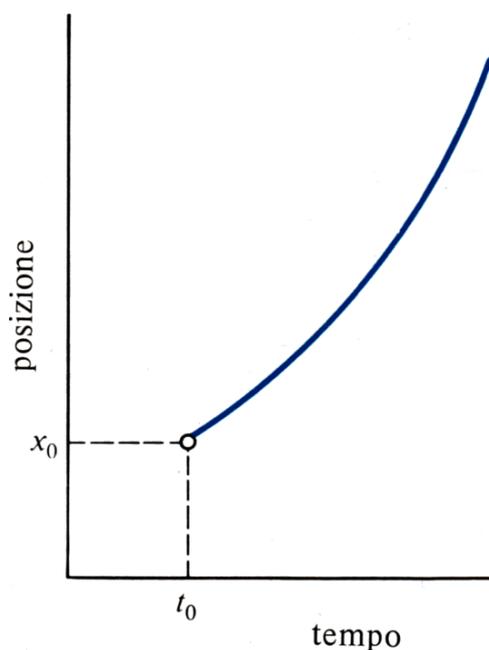
ovvero

$$x = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} a \cdot (t - t_0)^2. \quad [9.21]$$

Un grafico di  $x$  in funzione di  $t$ , corrispondente alla relazione [9.21], è mostrato in Fig. 9.30.

Una relazione molto utile fra velocità, posizione e accelerazione può essere ricavata guardando all'area, evidenziata con diversa ombreggiatura in Fig. 9.29, come all'area di un trapezio rettangolo avente come base minore  $v_0$ , come base maggiore  $v$  e come altezza  $\Delta t = t - t_0$ . Tale area corrisponde allo spostamento  $\Delta x$ :

$$\Delta x = \frac{1}{2} (v_0 + v) \cdot \Delta t. \quad [9.22]$$



**Fig. 9.30.** Grafico di  $x$  in funzione di  $t$  in caso di accelerazione costante. La pendenza della curva nell'istante  $t_0$  è  $v_0$ .

Nel caso di accelerazione costante (Fig. 9.28) da  $\Delta v \equiv v - v_0 = a \cdot \Delta t$  si ricava

$$\Delta t = \frac{v - v_0}{a} \quad [9.23]$$

e sostituendo nella [9.22] si ottiene:

$$\Delta x = \frac{(v_0 + v) \cdot (v - v_0)}{2a} \quad [9.24]$$

ovvero

$$\Delta x = \frac{(v^2 - v_0^2)}{2a} \quad [9.25]$$

che si può anche riscrivere come:

$$v^2 - v_0^2 = 2a \cdot \Delta x. \quad [9.26]$$

Ponendo  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = 0$  e  $v_0 = 0$ , le relazioni [9.17], [9.20] e [9.26] diventano particolarmente semplici.

### Quesiti

- 9.26.** Un bob parte dalla condizione di quiete e si muove con un'accelerazione costante di  $2.0 \text{ m/s}^2$ .
- Qual è la velocità del bob dopo  $5.0 \text{ s}$ ?
  - Quanto spazio ha percorso il bob in  $5.0 \text{ s}$ ?
  - Qual è la velocità media del bob nei primi  $5.0 \text{ s}$ ?
  - Quanto spazio ha percorso il bob fino al momento in cui ha raggiunto la velocità di  $40 \text{ m/s}$ ?
- 9.27.** Un'automobile, che inizialmente procede a velocità costante, accelera di  $1.0 \text{ m/s}^2$  per  $12 \text{ s}$ . Se in questi  $12 \text{ s}$  l'automobile ha percorso  $190 \text{ m}$ , qual era la velocità dell'automobile prima di accelerare?
- 9.28.** Un pedone corre alla sua velocità massima di  $6.0 \text{ m/s}$  per raggiungere un autobus fermo a un semaforo. Quando si trova a  $25 \text{ m}$  dall'autobus, il semaforo diventa verde e l'autobus riparte procedendo con una accelerazione costante di  $1.0 \text{ m/s}^2$ . Trovare (a) quanto spazio deve percorrere il pedone per raggiungere l'autobus o (b) la minima distanza dall'autobus che riesce a raggiungere (massimo avvicinamento). Risolvere il quesito usando un grafico oppure per via algebrica.

### Problemi di fine capitolo

- 9.29.** L'automobile A è ferma a un semaforo. Il semaforo diventa verde e A parte. Nell'istante in cui parte, l'automobile B la sorpassa muovendosi a velocità costante. I diagrammi tempo-velocità delle due automobili sono riportati nella Fig. I.
- Quanto tempo impiega l'automobile A per acquistare una velocità uguale a quella dell'auto B?
  - In quell'istante di quanto l'automobile B precede l'automobile A?
  - Quale delle due automobili precede l'altra e di quanto dopo  $0.012 \text{ h}$ ?
  - In quale istante l'automobile A raggiunge l'automobile B?
  - Di quanto si sono allontanate le due automobili dal semaforo nell'istante in cui A raggiunge B?

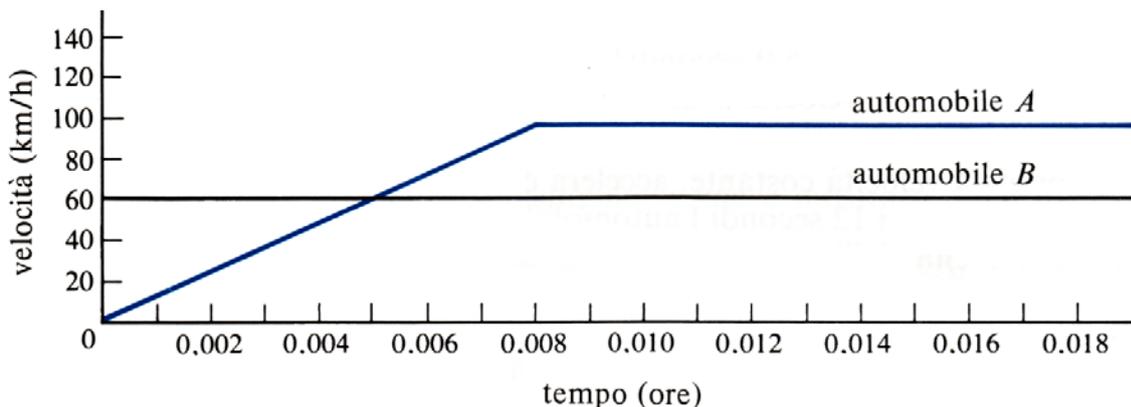


Fig. I

- 9.30.** (a) La distanza che la luce percorre in un anno è detta anno-luce (simbolo: al). Esprimere un anno-luce in metri.  
 (b) Definire un «anno-suono nell'aria». Perché non si usa mai questa «unità di misura»?
- 9.31.** I dati seguenti mostrano la velocità istantanea di un'automobile a intervalli di tempo di 1.0 s.

<i>tempo</i> (s)	<i>velocità</i> (m/s)
0.0	10.0
1.0	12.4
2.0	14.8
3.0	17.2
4.0	19.6
5.0	22.0
6.0	24.4

Disegnare il grafico tempo-velocità e usare il grafico ottenuto per rispondere alle seguenti domande.

- (a) Qual è la velocità dell'automobile all'istante  $t = 2.6$  s? E per  $t = 4.8$  s?  
 (b) Quanta strada percorre l'automobile nell'intervallo di tempo compreso fra i due tempi indicati in (a)?
- 9.32.** Un'automobile che viaggia lungo una strada statale rallenta quando entra in un piccolo paese. È arrestata da un semaforo nel centro, procede fino alla periferia del paese, e quindi aumenta di nuovo la propria velocità. Disegnate i grafici, con la scala dei tempi coincidente, che mostrino la velocità, la posizione, e l'accelerazione dell'automobile in funzione del tempo.
- 9.33.** Un'automobile viaggia lungo una strada con velocità costante. Sorpassa un'automobile-civetta della polizia parcheggiata al lato della strada. L'automobile della polizia accelera, raggiunge l'automobile che procede con velocità eccessiva, la sorpassa, e le segnala di arrestarsi. Disegnate un grafico che rappresenti le velocità delle due automobili in funzione del tempo.
- 9.34.** Un treno merci sta viaggiando alla velocità di 65 km/h. Fuori dalla nebbia, alla distanza di 1.0 km dietro al merci, appare sullo stesso binario un intercity che viaggia alla velocità di 120 km/h. Il macchinista dell'intercity si butta sui freni, ma, con i freni azionati, gli occorrono 3.0 km per fermarsi. Ci sarà lo scontro?  
 Per rispondere alla domanda si supponga che i freni applichino una accelerazione costante all'intercity e affrontare le seguenti questioni:  
 (a) Quanto tempo è necessario all'intercity per fermarsi?  
 (b) Qual è il valore dell'accelerazione durante la frenata?  
 (c) Disegnare su uno stesso diagramma orario i grafici tempo-posizione relativi ai due treni, e dal loro esame osservare se avviene o no lo scontro fra di essi. Provare, poi, a risolvere questa parte algebricamente.