14. MOTO IN TRE E DUE DIMENSIONI

Nei capitoli 9, 10 e 11 abbiamo considerato solo moti lungo una linea retta, cioè, moti in una sola dimensione. Lo spostamento, la velocità e l'accelerazione dovevano avere tutti e tre la stessa direzione della retta; potevano assumere, a seconda della situazione, valori positivi o negativi, ma non era loro permessa alcuna libertà nella direzione. Ora è chiaro che alla maggior parte delle situazioni che s'incontrano in natura non può essere imposto tale gruppo ristretto di requisiti. Per esempio, il moto di un nuotatore che attraversa un fiume, il volo di un aeroplano in una giornata ventosa, la traiettoria di un satellite che ruota intorno alla Terra, non possono essere descritti con i metodi dei capitoli 9, 10 e 11. Dobbiamo generalizzare questi metodi in modo da includere la possibilità di spostamenti, di velocità, di accelerazioni e di forze in molte direzioni diverse, che si possono presentare anche simultaneamente: dobbiamo imparare a trattare il moto in un mondo a tre dimensioni. Però, gran parte della generalizzazione necessaria per passare da una a tre dimensioni è già presente in una descrizione del moto in due dimensioni; rivolgeremo quindi l'attenzione al moto su una superficie piana.

14.1. Posizione e spostamento

Nel caso del moto lungo una linea retta, abbiamo descritto la posizione di un oggetto per mezzo della distanza e della direzione rispetto a un punto di riferimento fisso. Si è quindi detto «L'automobile si trova 5 km a ovest del centro della città», e abbiamo dovuto considerare solo due direzioni, la direzione est e la direzione ovest. Se ora l'automobile non è più vincolata a muoversi lungo una strada principale, rettilinea, ma è libera di vagare per le strade secondarie, possiamo descrivere la sua posizione in maniera analoga, ma dobbiamo fornire maggiori informazioni..

Potremmo dire, per esempio, «L'automobile si trova a 5.5 km a ovest e a 1.2 km a nord del centro della città». Si descrivono così due sue coordinate, misurate lungo due direzioni di riferimento perpendicolari giacenti sul piano. In termini più generali, possiamo rappresentare le due direzioni di riferimento mediante due linee coordinate perpendicolari, x e y, ciascuna con un verso positivo e un verso negativo, ciascuna con unità di misura prefissate. Una posizione sul piano è quindi data da due numeri coordinati; prima viene indicata la coordinata x, poi la coordinata y. Nella Fig. 14.1 sono localizzati alcuni punti per mezzo delle loro coordinate.

Si supponga che nella Fig. 14.2 la posizione (+4,+2) rappresenti la posizione su una nave, rispetto a un faro situato nell'origine e che sugli assi x e y si rappresentino le distanze in kilometri. La nave si muove, e dopo un certo tempo si trova nella posizione (+5,+4), com'è mostrato nella Fig. 14.2. La freccia disegnata fra questi due punti rappresenta lo spostamento $\Delta\mathbf{r}$ della nave. Poiché gli spostamenti sono dei vettori e cioè dipendono dalla direzione, dal verso e dal valore numerico, verranno indicati in neretto. In questo caso, la lunghezza della freccia in colore disegnata in figura rappresenta la distanza fra la posizione iniziale e la posizione finale della nave, mentre la direzione e il verso rappresentano rispettivamente la direzione e il verso dello spostamento.

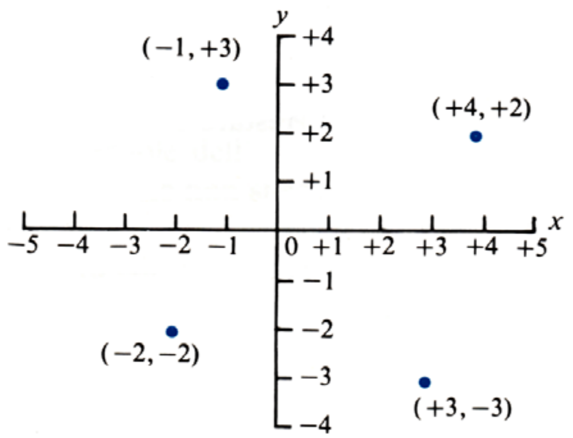


Fig. 14.1. La posizione su un piano può essere determinata mediante una coppia di numeri, le coordinate del punto: il primo è la distanza dall'origine misurata lungo l'asse x, il secondo è la distanza dall'origine misurata lungo l'asse y.

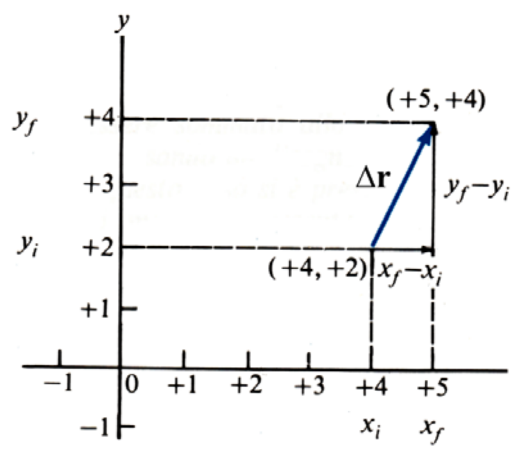


Fig. 14.2. La freccia fra le posizioni (+4,+2) e (+5,+4) rappresenta uno spostamento in due dimensioni.

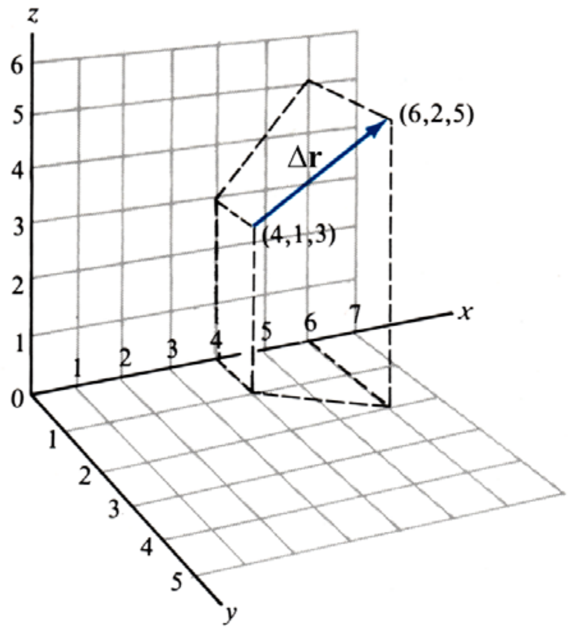


Fig. 14.3. Gli assi x e y giacciono su un piano orizzontale, e l'asse z su un piano perpendicolare ad esso. Lo spostamento $\Delta\mathbf{r}$ non avviene in alcuno dei due piani. L'origine della freccia è 3 unità al di sopra del piano x-y e la punta è 5 unità al di sopra del piano x-y.

Gli spostamenti possono anche non giacere sul piano degli assi x e y, come è mostrato nella Fig. 14.3. Per descrivere uno spostamento siffatto, si disegna un terzo asse, l'asse z, perpendicolare al piano x-y. In questo caso, per descrivere lo spostamento occorrono sei coordinate invece di quattro: (x_i,y_i,z_i) e (x_f,y_f,z_f). Nella Fig. 14.3 sono, rispettivamente, (4,1,3) e (6,2,5). Ritornando agli spostamenti sul piano x-y, la Fig. 14.4 mostra due spostamenti in un solo piano, con coordinate sia positive sia negative. Si rilevi che, sebbene i due spostamenti abbiano coordinate diverse, hanno la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso: sono perciò due spostamenti uguali, ma localizzati diversamente. Si vede quindi che uno spostamento può essere trasferito e restare invariato.

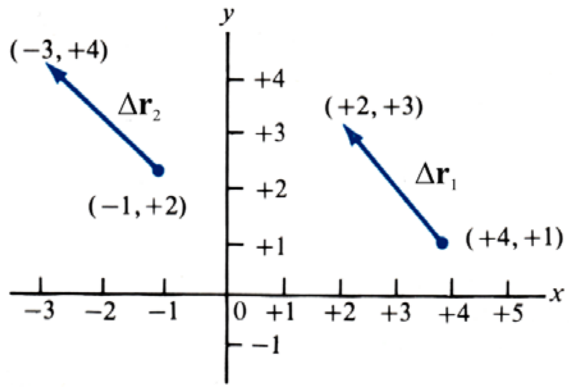
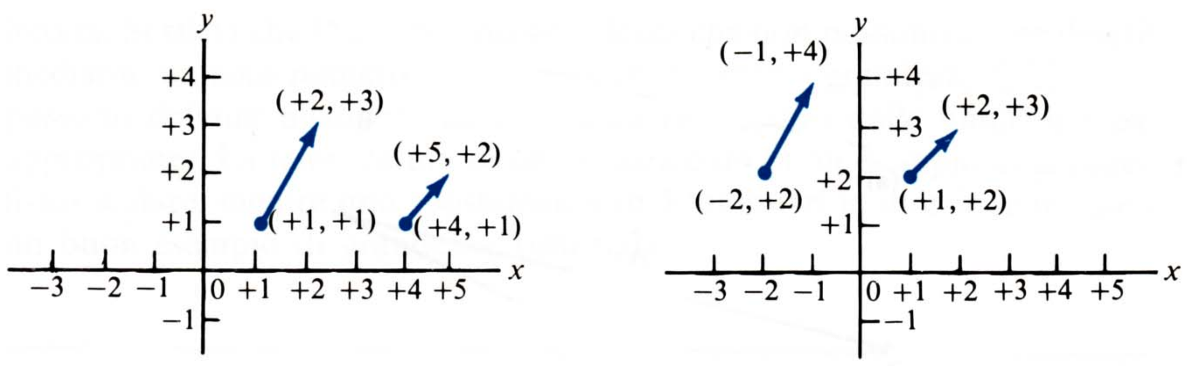


Fig. 14.4. Due spostamenti uguali situati in quadranti diversi.

Uno spostamento è anche indipendente dalla posizione dell'origine del sistema di coordinate, come mostra la Fig. 14.5. Anche in questo caso, sebbene le coordinate che descrivono la posizione varino, gli spostamenti restano invariati. Sotto questo aspetto la situazione in due o tre dimensioni è uguale a quella in una sola dimensione.

Sebbene convenga spesso descrivere gli spostamenti mediante i relativi spostamenti lungo gli assi x e y di un qualche sistema di coordinate, non è necessario farlo perché, come si è appena visto, gli spostamenti sono indipendenti dal sistema di coordinate scelto. Spesso interessa solo la relazione fra uno spostamento e un altro, e non le loro coordinate; in tal caso si fa a meno di un sistema di coordinate e si usa una rappresentazione geometrica, facendo uso soltanto delle frecce.



(a) (b)

Fig. 14.5. Nel grafico (b) l'origine del grafico (a) è stata traslata verso il basso di una unità lungo l'asse y, e di 3 unità verso destra lungo l'asse x.

Quesiti

14.1. Quante coppie di spostamenti uguali si possono fare utilizzando i punti di Fig. 14.1?
14.2. Quali sono il modulo, la direzione e il verso di uno spostamento dalla posizione (1,2) alla posizione (3,4)?
14.3. Puoi percorrere le seguenti distanze, una dopo l'altra, nell'ordine che preferisci:
(*a*) 3 metri verso est;
(*b*) 2 metri verso nord;
(*c*) 3 metri verso est.
Alla fine del percorso, qual è il punto più lontano dal punto di partenza nel quale ti puoi trovare?

14.2. Vettori posizione, spostamento e velocità

Ora siamo in grado di descrivere il moto su un piano o nello spazio. Come abbiamo fatto nel capitolo 9, concentreremo l'attenzione su situazioni in cui il moto di corpi reali può essere sostituito con il moto di punti materiali. In questi casi la posizione del corpo in un piano può venire individuata da un vettore che ha l'origine in un punto di riferimento e l'altro estremo nel punto materiale. Le posizioni del punto materiale nei due istanti t_1 e t_2 possono venire espresse con i due vettori posizione $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ nella Fig. 14.6.

Lo spostamento del corpo mobile durante l'intervallo di tempo:

$$\Delta t = t_2 - t_1 \qquad [14.1]$$

si trova determinando la differenza tra i due vettori posizione:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \, . \qquad [14.2]$$

Ora applichiamo quanto abbiamo imparato sulla divisione di un vettore per uno scalare per definire il vettore velocità media:

$$\mathbf{v}_{media} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \qquad [14.3]$$

È evidente che $\mathbf{v}_{media}$ ha la stessa direzione orientata di $\Delta\mathbf{r}$. Ma i moduli dei due vettori non si possono confrontare essendo espressi in unità di misura diverse. Con la scala indicata nella Fig. 14.6, il modulo dello spostamento, Δr, è 2.8 m. Se Δt = 2.0 s, il modulo della velocità media è 2.8 m/(2.0 s) = 1.4 m/s. Quanto deve essere lunga una freccia per rappresentare il modulo della velocità?

La risposta dipende dalla scala in cui deve essere disegnata la freccia. La Fig. 14.7 mostra due esempi del vettore velocità media disegnato in scale diverse. Perciò ogni volta che si disegnano vettori spostamento e vettori velocità sullo stesso diagramma, deve essere indicata la scala di ogni tipo di vettore in modo da potere ottenere dal diagramma le opportune informazioni.

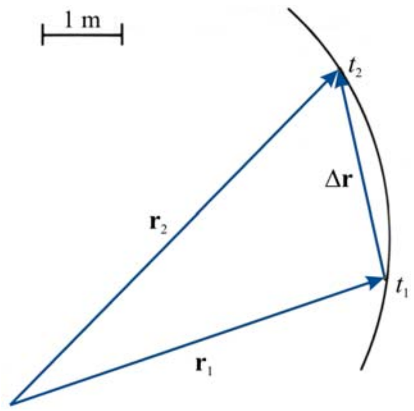


Fig. 14.6. Due vettori posizione e la loro differenza. Il vettore posizione nell'istante precedente è sottratto dal vettore posizione nell'istante successivo.

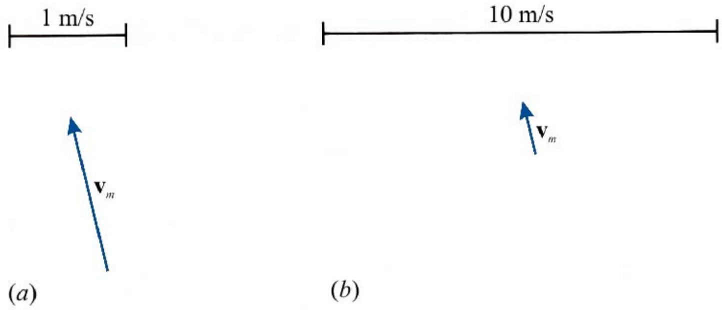


Fig. 14.7. Il vettore velocità corrispondente al vettore spostamento della Fig. 14.6, disegnato in due scale diverse.

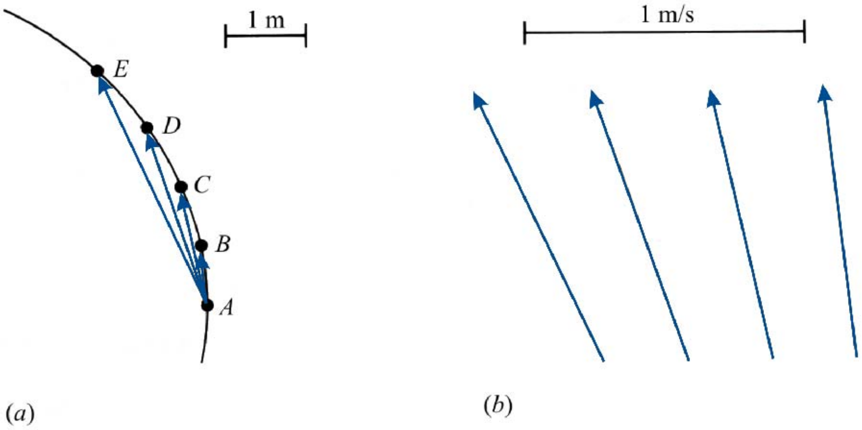


Fig. 14.8. (*a*) Quattro vettori spostamento e (*b*) i corrispondenti vettori velocità media. Gli intervalli di tempo uguali hanno una durata di 1.0 s.

Come nel caso del moto rettilineo, prendendo intervalli di tempo sempre più piccoli si perviene alla velocità istantanea:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \qquad [14.4]$$

In generale al diminuire di Δt varia non soltanto il modulo, ma anche la direzione orientata di $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$.

Tale variazione è illustrata nella Fig. 14.8. Le quattro frecce della Fig. 14.8(*a*) rappresentano lo spostamento del corpo mobile in intervalli di tempo uguali. I corrispondenti vettori velocità media sono rappresentati nella Fig. 14.8(*b*). Al tendere di Δt a zero la direzione orientata di $\mathbf{v}_{media}$ tende alla direzione orientata della tangente alla traiettoria del corpo mobile.

Se la velocità istantanea è la stessa in tutti i punti di una traiettoria, il vettore velocità è costante; quindi devono essere costanti sia il suo modulo che la direzione e il verso. La velocità è invece variabile quando variano il modulo o la direzione o il verso. Studieremo anzitutto il caso particolare del moto circolare a velocità costante in modulo (*moto circolare uniforme*).

Quesiti

14.4. Controlla il modulo, la direzione e il verso dei quattro vettori velocità nella Fig. 14.8(*b*) usando i vettori spostamento presentati nella Fig. 14.8(*a*), le informazioni contenute nella didascalia e le due scale. Descrivi il procedimento che hai seguito.

14.5. Basandoti sui moduli dei vettori velocità media nella Fig. 14.8(*b*), determina il modulo della velocità istantanea nel punto *A*.

14.6. La Fig. A rappresenta le posizioni di un punto in quattro istanti successivi a 0.5 s l'uno dall'altro. Disegna i vettori velocità media corrispondenti ai tre vettori spostamento rappresentati in colore. Usa una scala che fa corrispondere 1 cm/s a 2 cm.

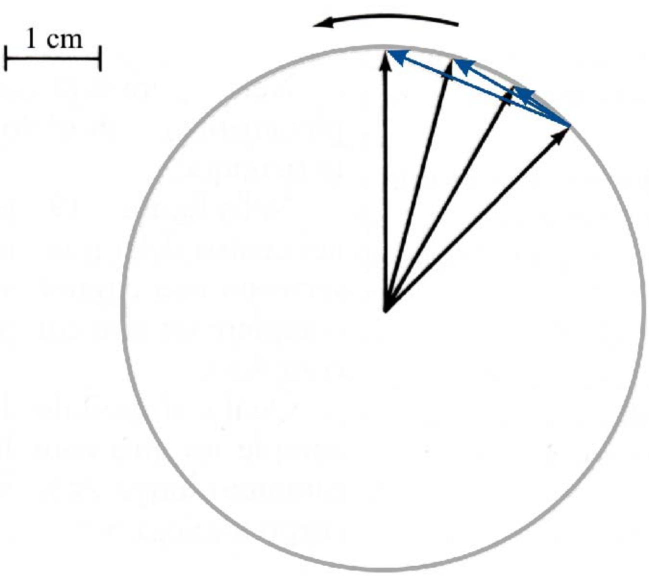


Fig. A

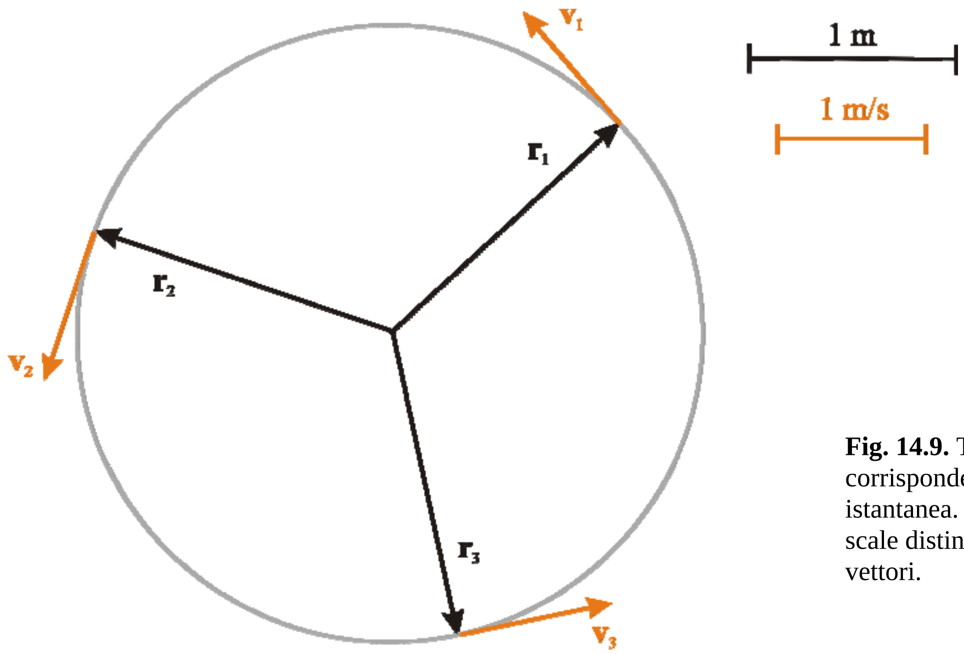


Fig. 14.9. Tre vettori posizione e i corrispondenti vettori velocità istantanea. È importante notare le scale distinte per i due insiemi di vettori.

14.3. Moto circolare uniforme

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che il vettore velocità istantanea è tangente alla traiettoria del corpo mobile. Perciò nel caso del moto su una traiettoria circolare, il vettore velocità è perpendicolare al raggio in ciascun punto. Se il modulo della velocità è costante nel tempo, il moto si dice *moto circolare uniforme* (Fig. 14.9).

Nella Fig. 14.9 ciascuno dei tre vettori velocità è individuato completamente dal modulo, dalla direzione e dal verso e può essere disegnato ovunque.

Nella Fig. 14.10 i tre vettori precedenti sono disegnati con l'origine nel centro della traiettoria circolare; si può notare che le loro punte descrivono una circonferenza. Durante il tempo che il corpo impiega per compiere un giro completo, la punta del vettore velocità compie un giro completo.

Qual è il modulo della velocità del corpo mobile? Mentre il corpo compie un giro completo, la punta del vettore posizione percorre un cammino lungo $2\pi r$. Se T è l'intervallo di tempo, detto *periodo*, che il corpo impiega per compiere un giro, il modulo della velocità è:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \qquad [14.5]$$

Si può dunque affermare che nel moto circolare uniforme, il modulo della velocità è uguale al rapporto tra la lunghezza della traiettoria circolare e il periodo del moto.

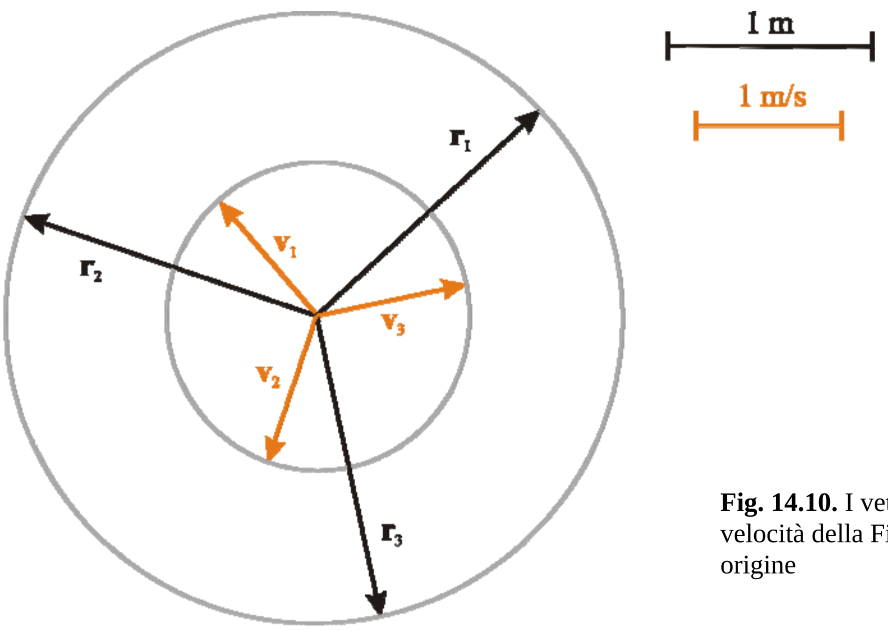


Fig. 14.10. I vettori posizione e i vettori velocità della Fig. 14.9 disegnati dalla stessa origine

Quesiti

14.7. (*a*) Usando le scale della Fig. 14.9, trova il raggio della traiettoria circolare e il modulo della velocità del corpo mobile.
(*b*) Trova il periodo del moto.

14.8. Quando un aeroporto è congestionato, un aeroplano può essere tenuto per un po' di tempo in un circuito d'attesa circolare. In tali condizioni, la velocità dell'aereo può essere di 500 km/h e il raggio del circuito circolare di 25 km.
(*a*) Usando una scala di 10 km : 1 cm, disegna la traiettoria circolare dell'aeroplano e disegna anche un vettore posizione.
(*b*) Usando una scala che fa corrispondere 250 km/h a 1 cm, disegna la circonferenza descritta dall'estremo del vettore velocità. Disegna anche il vettore velocità corrispondente al vettore posizione che hai tracciato nel punto (*a*).
(*c*) Quanto tempo impiega l'aeroplano per compiere un giro?

14.4. L'accelerazione nel moto circolare

Un corpo mobile la cui velocità varia da $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$ durante un intervallo di tempo Δt ha la seguente accelerazione media:

$$\mathbf{a}_{media} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \qquad [14.6]$$

L'accelerazione media ha la stessa direzione e lo stesso verso della variazione della velocità, ma è espressa in un'unità di misura diversa e deve quindi essere disegnata nella propria scala.

Prendendo intervalli di tempo sempre più piccoli, si ottiene il vettore accelerazione istantanea:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \qquad [14.7]$$

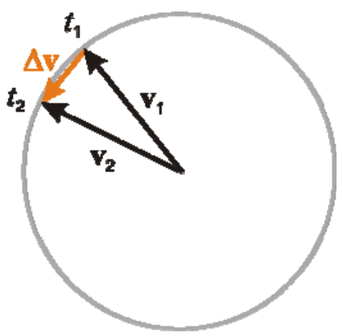


Fig. 14.11. Una variazione della velocità durante un intervallo di tempo Δt.

Affinché l'accelerazione sia costante, devono essere costanti sia il modulo che la direzione e il verso. L'accelerazione è pertanto variabile quando variano il modulo o la direzione o il verso.

L'accelerazione del moto circolare uniforme è un esempio importante di accelerazione costante in modulo, ma con direzione e verso variabili. Per riprendere il discorso dal punto dove l'abbiamo interrotto nel paragrafo precedente, disegniamo due vettori velocità negli istanti t_1 e t_2 e la loro differenza (Fig. 14.11). È importante notare che la variazione della velocità $\Delta \mathbf{v}$, e quindi l'accelerazione media $\Delta \mathbf{v}/\Delta t$, è quasi perpendicolare a $\mathbf{v}_1$. Al tendere di Δt a zero l'accelerazione istantanea diventa tangente alla circonferenza descritta dalla punta del vettore velocità, assumendo il verso opposto a quello di $\mathbf{r}$, (Fig. 14.12).

Nella Fig. 14.12 i vettori posizione, velocità e accelerazione si riferiscono tutti allo stesso istante t_1. Per richiamare l'attenzione su questo fatto, i tre vettori sono ridisegnati nella Fig. 14.13 con l'origine dei vettori velocità e accelerazione nella posizione del corpo mobile.

La relazione fra i tre vettori nella Fig. 14.13 rimane invariata qualunque sia la posizione del corpo; il vettore velocità è sempre tangente alla traiettoria circolare ed è rivolto nel verso del moto, mentre il vettore accelerazione è orientato verso il centro della traiettoria circolare. È questo il motivo per cui l'accelerazione di un corpo che si muove di moto circolare uniforme è detta accelerazione centripeta.

Durante un periodo la punta del vettore posizione nella Fig. 14.13 descrive una circonferenza di lunghezza $2\pi r$.

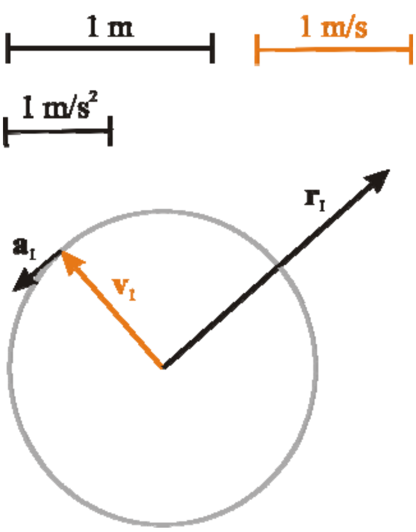


Fig. 14.12. Il vettore accelerazione istantanea disegnato nella propria scala.

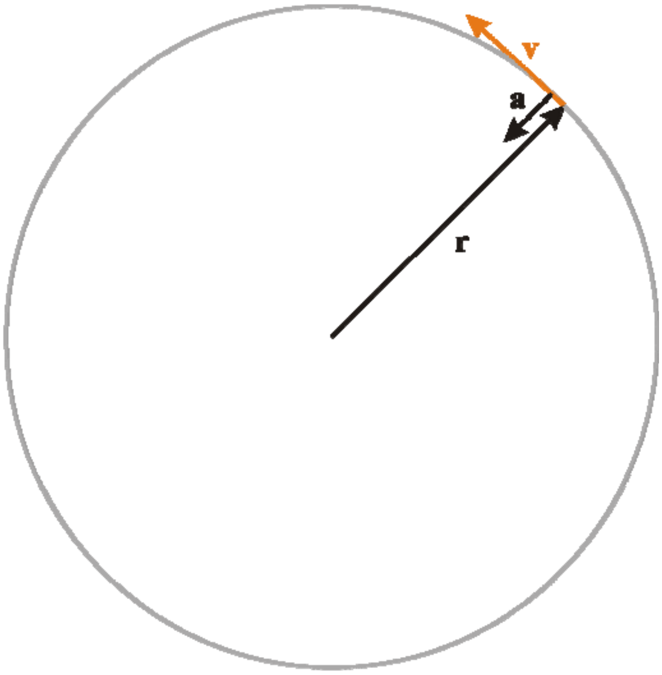


Fig. 14.13. Gli stessi vettori della Fig. 14.12. I vettori **v** e **a** sono disegnati con l'origine nella posizione del corpo mobile. Poiché la relazione tra questi vettori è la stessa in ogni punto della traiettoria, il pedice è stato tralasciato.

Durante lo stesso tempo. la punta del vettore velocità descrive una circonferenza di lunghezza $2\pi v$. Perciò il modulo dell'accelerazione è:

$$a = \frac{2\pi v}{T} \qquad [14.8]$$

Combinando la relazione [14.8] con la relazione [14.5] del paragrafo precedente, si ottengono due utili relazioni. Risolvendo la relazione [14.5] rispetto a T e sostituendo il risultato ottenuto nella relazione [14.8], si ottiene il modulo dell'accelerazione in funzione del modulo della velocità e del raggio della traiettoria circolare:

$$a = \frac{v^2}{r} \qquad [14.9]$$

Sostituendo v dato dalla relazione [14.5] nella relazione [14.8], si ottiene il modulo dell'accelerazione in funzione del raggio della traiettoria circolare e del periodo del moto:

$$a = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \qquad [14.10]$$

L'accelerazione è orientata in ogni istante verso il centro della traiettoria circolare e quindi ha verso opposto a quello del vettore posizione. Perciò, la relazione precedente può essere scritta sotto forma di relazione vettoriale:

$$\mathbf{a} = -\frac{4\pi^2}{T^2}\mathbf{r} \qquad [14.11]$$

Il segno meno è necessario poiché le grandezze vettoriali **a** e **r** hanno versi opposti.

Quesiti

14.9. Dimostra che le dimensioni e l'unità di misura dell'espressione v^2/r per l'accelerazione centripeta sono quelle dell'accelerazione.

14.10. Il pianeta Mercurio ha un periodo di 7.6×10^6 s e dista 5.8×10^{10} m dal Sole. Quanto vale la sua accelerazione diretta verso il centro del Sole?

14.11. Gli astronauti di un veicolo spaziale Apollo ruotavano attorno alla Luna con un periodo di 6.5×10^3 s, a una distanza di circa 1.7×10^6 m dal centro della Luna. Qual era la loro accelerazione centripeta?

14.12. Supponete che il modulo della velocità di un corpo che si muove di moto circolare raddoppi. Dire come vengono influenzati:

(*a*) il modulo dell'accelerazione centripeta;
(*b*) il modulo della forza centripeta;
(*c*) il periodo del moto.

14.5. Accelerazione vettoriale

Abbiamo analizzato finora due tipi di moto:
1. moto rettilineo accelerato (par. 9.7 pag. 128 e par. 9.8 pag. 131);
2. moto circolare uniforme (par. 14.6 pag. 168 e par. 14.4 pag. 169).

Nel 1° caso, in cui varia solo l'intensità del vettore velocità, esiste solo accelerazione tangenziale, mentre nel 2° caso, in cui varia solo la direzione del vettore velocità, esiste solo accelerazione centripeta. Di conseguenza possiamo ritenere valida l'affermazione secondo cui il vettore accelerazione tangenziale produce la variazione di intensità del vettore velocità (rispetto al tempo) mentre il vettore accelerazione centripeta produce la variazione di direzione del vettore velocità (rispetto al tempo).

In generale però il moto di un punto risulta curvilineo ed accelerato (vedi ad esempio il moto di caduta libera di un proiettile sparato con velocità orizzontale: Fig. 14.4) per cui è da aspettarsi che esistano sia accelerazione tangenziale, in quanto il vettore velocità cambia in intensità, che accelerazione centripeta, in quanto il vettore velocità cambia anche in direzione.

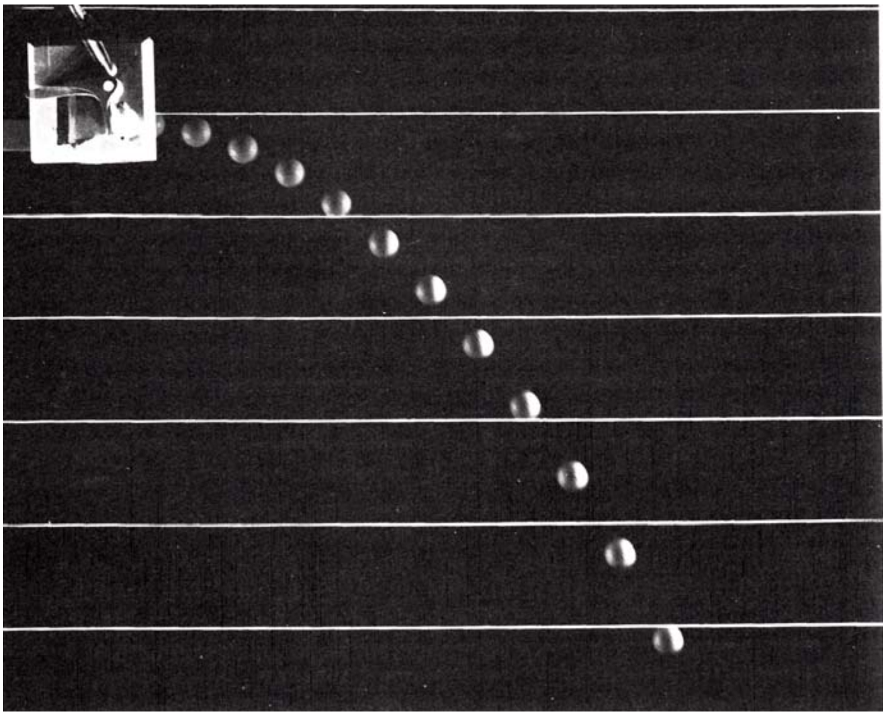


Fig. 14.14. Fotografia multi-flash di una palla da golf lanciata orizzontalmente con una velocità iniziale di 2.00 m/s dal dispositivo situato in alto a sinistra. L'intervallo di tempo fra i lampi è 1/30 di secondo. Le linee bianche sono l'immagine di una serie di fili paralleli collocati dietro la palla da golf, a 15 cm di distanza. Perché i fili sembrano essere in primo piano?

Se analizziamo (Fig. 14.15) un tale tipo di moto, curvilineo ed accelerato, circa il vettore **a** possiamo dire che esso (a differenza del vettore **v** il quale risulta sempre tangente alla traiettoria) può assumere qualunque *direzione* (a seconda del tipo di movimento e occorrerà calcolare la direzione di $\Delta\mathbf{v}$ quando $\Delta t \to 0$), *verso* sempre rivolto verso la concavità della traiettoria (se questa è curvilinea), *intensità* uguale alla a scalare che già conosciamo. Occorrerà allora scomporre il vettore **a** in un punto P in altri due vettori componenti: uno $\mathbf{a}_t$ in direzione della tangente in P alla traiettoria e uno $\mathbf{a}_c$ in direzione della normale in P alla traiettoria stessa; i vettori $\mathbf{a}_t$ e $\mathbf{a}_c$ vengono chiamati, rispettivamente, *accelerazione tangenziale* ed *accelerazione centripeta* (o *normale*, o *radiale*).

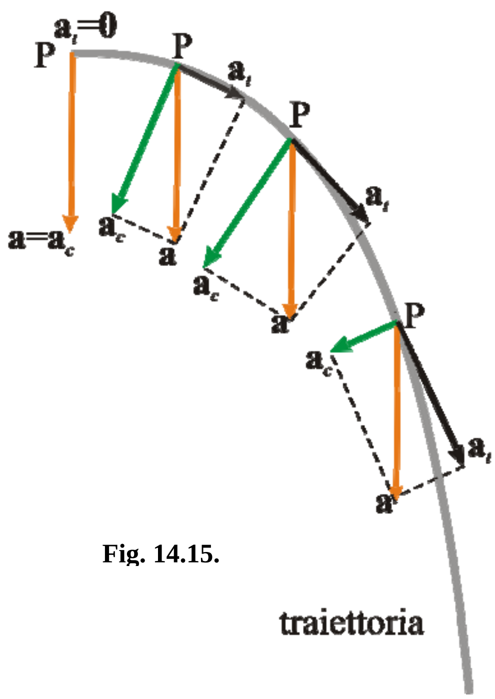


Fig. 14.15.

In riferimento alla accelerazione vettoriale se prendiamo in considerazione la 2ª legge di Newton $\mathbf{F} = m\cdot\mathbf{a}$, ricordando che $m > 0$ sempre, possiamo dire che la presenza della **a** comporta la presenza di una forza che causa il moto in questione. Analogamente alla **a** , possiamo scomporre la forza **F** in due componenti: $\mathbf{F} = \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_c$, dove la componente tangenziale $\mathbf{F}_t$ è responsabile della $\mathbf{a}_t$, e la componente centripeta $\mathbf{F}_c$ è responsabile della $\mathbf{a}_c$.

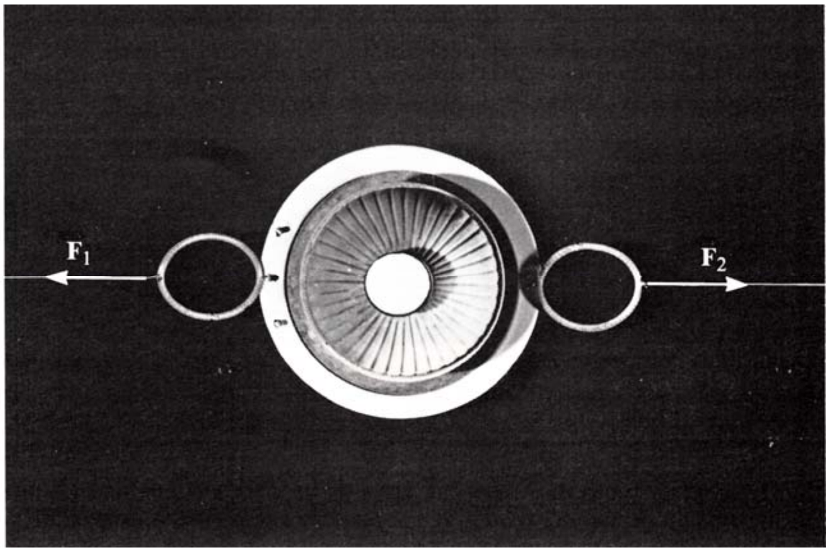


Fig. 14.16. Due forze, uguali in modulo e direzione ma di verso opposto, agiscono su un disco a ghiaccio secco. La forza risultante è nulla e l'accelerazione osservata è nulla.

In altre parole per avere un moto curvilineo accelerato occorrono: una $\mathbf{F}_t$ per causare la variazione di intensità del vettore **v,** cioè per "accelerare" il corpo, e una $\mathbf{F}_c$ per "incurvare la traiettoria" del corpo, cioè per produrre la variazione di direzione del vettore **v**.

14.6. Come si sommano le forze: la forza risultante

L'accelerazione è un vettore, e la legge del moto di Newton dice che l'accelerazione di un oggetto è proporzionale alla forza che agisce su di esso. Quindi anche la forza è un vettore? Per rispondere a questa domanda dobbiamo cercare di capire come si sommano le forze: se si sommano come gli spostamenti, sono anch'esse dei vettori.

Ripensate al disco a ghiaccio secco tirato da due elastici ad anello uguali uniti l'uno all'altro (Fig. 10.11 a pag. 141). In questo caso la forza che agisce sul disco è doppia rispetto alla forza che agirebbe se il disco fosse tirato da un solo elastico: l'accelerazione è quindi proporzionale alla somma di due forze. Quando due elastici, ugualmente tesi, tirano in direzioni opposte, non si ha accelerazione (Fig. 14.16). A quanto pare, la forza risultante, la forza che provoca le variazioni del moto, è ottenuta sommando le forze nello stesso modo con cui abbiamo sommato gli spostamenti, cioè vettorialmente. Quindi, per quanto riguarda il loro effetto sul movimento, due forze di uguale intensità e dirette in senso opposto si elidono e una di esse può considerarsi l'opposta dell'altra.

In generale, quando su un oggetto agiscono forze che hanno la stessa direzione ma verso opposto, si trova che l'accelerazione dell'oggetto è proporzionale alla somma algebrica delle forze. Quando su un disco a ghiaccio secco agiscono due forze, una di 1 N verso sinistra e una di 3 N verso destra, il disco accelera verso destra come se fosse tirato da una sola forza di 2 N. La forza risultante di 2 N è la somma delle singole forze secondo quanto è indicato in Fig. 14.17.

Non sempre però due forze agiscono nella stessa direzione e con versi uguali o contrari: esse possono agire in direzioni che formano un angolo qualsiasi tra loro. Qual è allora la direzione e l'intensità della forza risultante? Supponiamo di tirare un oggetto contemporaneamente con due elastici identici e ugualmente tesi, attaccati come in Fig. 14.18. Troveremo che l'oggetto accelera muovendosi lungo la bisettrice dell'angolo compreso tra le direzioni lungo le quali agiscono le due forze. Evidentemente la forza risultante è la somma vettoriale delle due forze singole. Gli esperimenti mostrano che le cose stanno proprio così. L'accelerazione impressa dai due elastici di Fig. 14.18 è data da $\mathbf{F} = m\cdot\mathbf{a}$, dove **F** è il vettore forza risultante che si ottiene trattando ogni singola forza come un vettore e sommandole poi insieme (Fig. 14.19). Ciò è valido anche quando le due forze non sono uguali o quando ci sono più di due forze: il modulo, la direzione e il verso della forza risultante sono dati dal vettore somma delle singole forze.

Fig. 14.17. Una forza $\mathbf{F}_2$ di 3 N agisce su un oggetto verso destra e una forza $\mathbf{F}_1$ di 1 N agisce verso sinistra. Sommandole come abbiamo fatto per gli spostamenti otteniamo una forza **F** di 2 N che agisce verso destra. Questa è la forza risultante che compare nella legge di Newton.

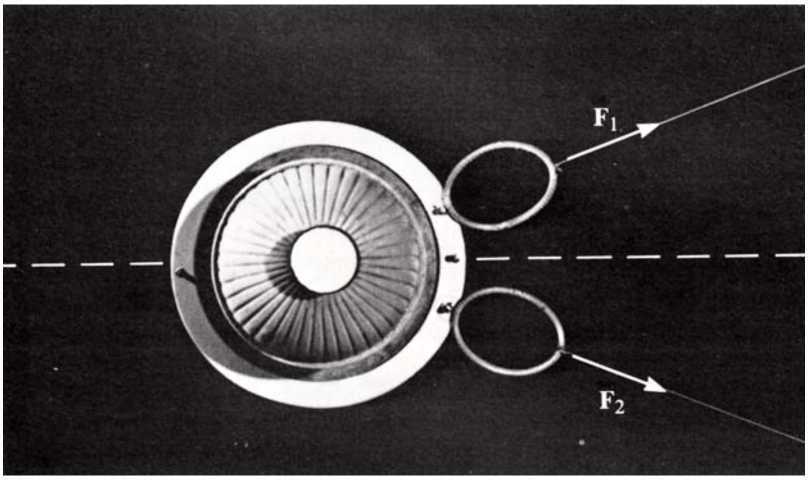


Fig. 14.18. Due forze di ugual modulo agiscono su di un oggetto lungo direzioni che formano fra loro un certo angolo. L'oggetto accelera lungo la bisettrice, tratteggiata, dell'angolo compreso tra le linee d'azione delle due forze. Concludiamo quindi che la forza risultante agisce lungo questa linea.

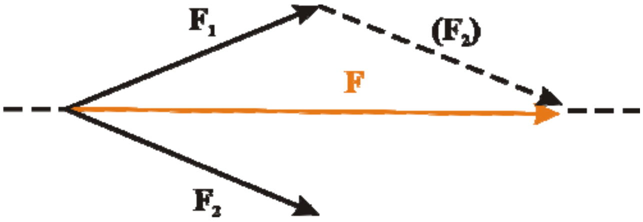


Fig. 14.19. Somma vettoriale delle due forze di Fig. 14.18. La somma è la forza risultante che determina sia la direzione e il verso, sia il modulo dell'accelerazione di una data massa.

Quesiti

14.13. Se su un oggetto agiscono più forze con modulo, direzione e verso differenti, in quale direzione e verso verrà accelerato l'oggetto?

14.14. Nella, quale sarebbe l'accelerazione del disco se la sua massa fosse 0.50 kg, F_2 = 10.0 N, e F_1 = 6.0 N?

14.15. Si supponga che nella Fig. 14.18 sia $F_1 = F_2 = 2.0$ N. Quale sarebbe la forza risultante agente sul disco?

14.16. Due uomini e un ragazzo tirano una barca lungo un canale. I due uomini tirano con forze F_1 = 400N e F_2 = 320 N come mostrato in Fig. B. Trova il modulo, la direzione e il verso della forza che il ragazzo deve esercitare per mantenere la barca nel centro del canale.

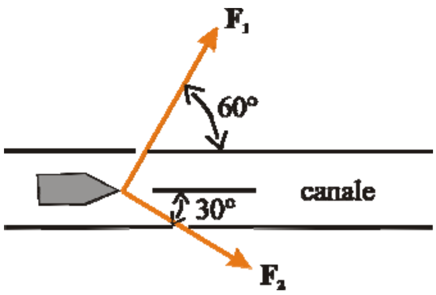


Fig. B

14.7. Natura vettoriale della seconda legge di Newton

Gli esperimenti descritti nel paragrafo precedente mostrano che, per un moto lungo una linea retta, la legge di Newton **F** = m**a** è una legge vettoriale e **F** rappresenta la forza risultante.

Questa relazione vettoriale è forse valida anche per i corpi che si muovono lungo una linea curva, dove l'accelerazione e la velocità non hanno la stessa direzione? Il moto circolare uniforme che abbiamo studiato nei paragraf1 14.3 e 14.4 dovrebbe fornirci una risposta. La Fig. 14.20 mostra un dispositivo progettato in modo da riprodurre questa situazione usando un disco a ghiaccio secco: il disco è fermo su di un piano orizzontale di vetro, un'estremità del filo è legata ad un sostegno al centro del tavolo e l'altra estremità è legata ad un elastico ad anello fissato al disco.

Nell'esperimento, al disco viene data una leggera spinta in modo da farlo muovere lungo una circonferenza: la Fig. 14.21 è una fotografia multiflash del moto. L'intervallo fra un flash e quello successivo è di 0.42 s, e l'esperimento viene interrotto prima che sia registrato un giro completo. La distanza fra le immagini successive del disco mostra chiaramente che il modulo della velocità resta pressoché costante.

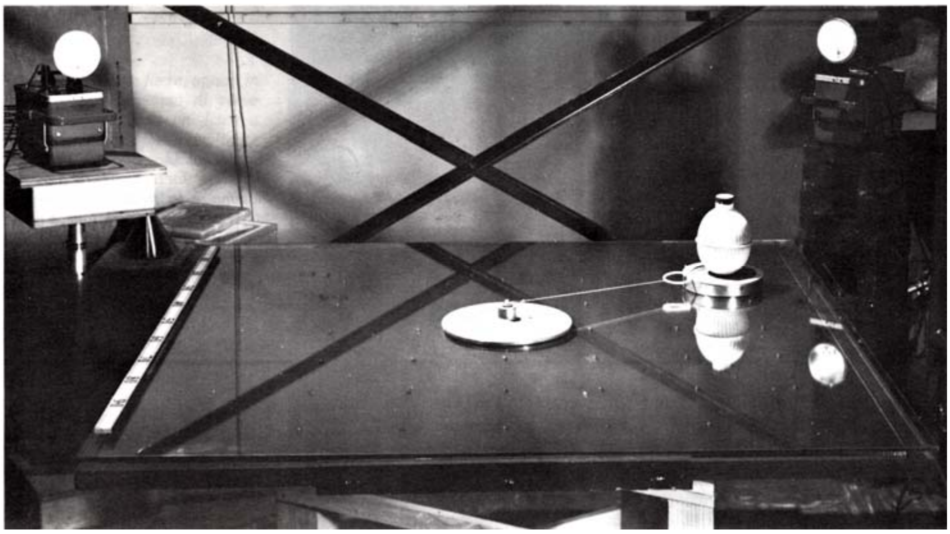


Fig. 14.20. Questo è un dispositivo che serve per misurare la forza centripeta che agisce su di un corpo che si muove lungo una traiettoria circolare. Il disco è fermo, nessuna forza agisce su di esso, e l'anello non è teso.

L'elastico fissato al disco è allungato e l'allungamento rimane invariato durante tutto il moto. In base all'allungamento, possiamo ricavare la forza che muove il disco di moto circolare uniforme, la *forza centripeta*.

Muovendosi dalla prima all'ultima posizione, il disco descrive un arco di 286° in (10×0.42 s).

Quindi, il tempo impiegato per compiere un giro completo, ossia il periodo del moto è:

$$T = \frac{360°}{286°} \times 4.2\,\mathrm{s} = 5.3\,\mathrm{s} \qquad [14.12]$$

Il raggio della traiettoria circolare è 0.44 m. Perciò, il modulo dell'accelerazione centripeta è

$$a = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 \times 0.44\,\mathrm{m}}{(5.3\,\mathrm{s})^2} = 0.62\,\mathrm{m/s^2} \qquad [14.13]$$

La massa del disco è 3.9 kg, quindi se la legge di Newton è valida anche per il moto circolare, il modulo della forza esercitata dall'anello di gomma deve valere

$$F = m \cdot a = 3.9\,\mathrm{kg} \times 0.62\,\mathrm{m/s^2} = 2.4\,\mathrm{N} \qquad [14.14]$$

Una misura diretta della forza con una molla tarata ha mostrato che la forza è circa 2.4 N. Questo esperimento ed altri analoghi mostrano che la legge di Newton

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} \qquad [14.15]$$

è realmente una legge vettoriale, ed è valida indipendentemente dal fatto che la forza faccia variare, della velocità di un corpo, solo il modulo, solo la direzione orientata, oppure l'uno e l'altra.

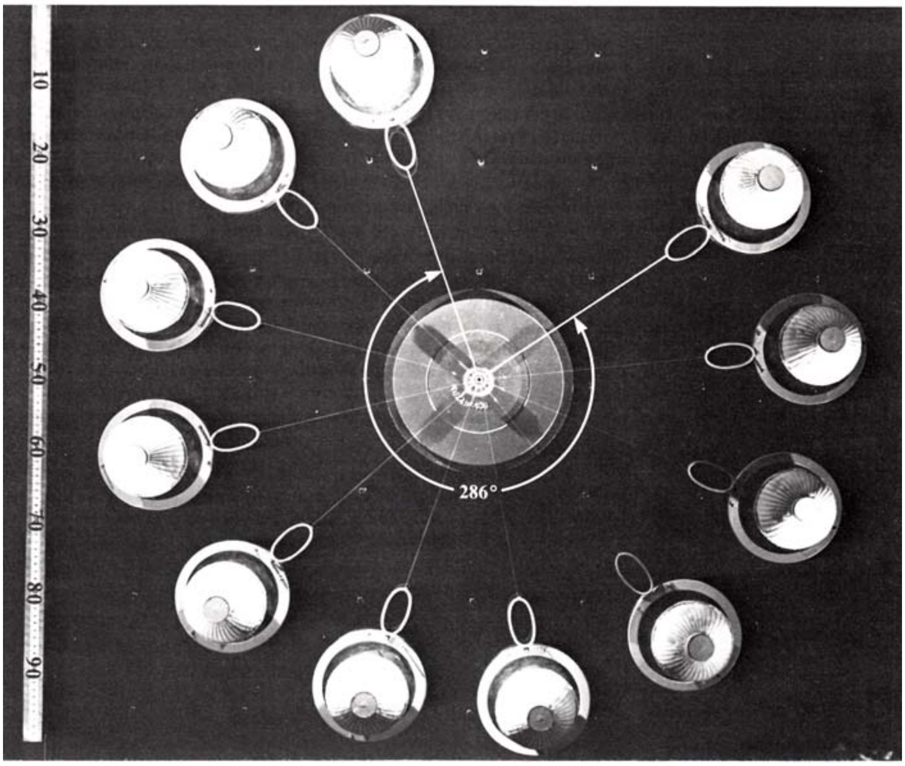


Fig. 14.21. Un disco si muove lungo una traiettoria circolare con velocità costante in modulo; compie un arco di 286° nell'intervallo di tempo pari a dieci flash, ognuno della durata di 0.42 s. Si noti che l'anello è ugualmente teso in tutte le posizioni: ciò indica che la forza che agisce è costante.

Quesiti

14.17. Qual è il valore della forza centripeta necessaria per fare descrivere a un corpo di 3.0 kg una traiettoria circolare di raggio 2.0 m a una velocità di modulo 4.0 m/s?

14.18. Qual è l'effetto sul modulo e sulla direzione orientata della velocità di un corpo mobile quando una forza agisce su di esso in una direzione perpendicolare alla sua traiettoria?

14.19. Determinate il modulo, la direzione e il verso della velocità del disco della Fig. 14.21 quando esso si trova nel punto più basso della fotografia e si sta muovendo in verso orario.

14.20. Determinate il modulo, la direzione e il verso dell'accelerazione del disco delle Fig. 14.21 quando esso si trova nel punto più basso della fotografia.

14.8. Alcune considerazioni sul moto circolare e sulla forza di tipo centripeta

1. Quali azioni cambiano la direzione del moto di un corpo?

2. È vero che un corpo inizialmente in moto e soggetto ad una spinta (forza) debba in seguito muoversi nella direzione dell'ultima spinta?

3. Quali azioni occorrono per ottenere un moto circolare (almeno approssimativamente)?

4. Che cosa accade se ad un corpo in moto curvilineo, ad esempio circolare, viene a mancare il vincolo che lo fa curvare?
   Può un oggetto continuare il moto curvilineo anche dopo la rimozione del vincolo?

5. Che cosa accade se ad un corpo in moto circolare viene a diminuire o ad aumentare la forza centripeta?

6. Eseguite l'esperimento seguente: legate un pesetto ad un filo e cercate di far muovere il filo di moto circolare uniforme su un piano verticale. Descrivete le forze che intervengono in questo esperimento e il loro ruolo.
   È vero che il pesetto tende a rimanere indietro rispetto al filo, e il filo stesso lo tira nella direzione del moto?

7. Quando in macchina, affrontiamo una curva con moto uniforme, ci sentiamo "lanciati verso l'esterno". Esiste veramente questa forza che ci spinge verso l'esterno?

Problemi di fine capitolo

14.21. (*a*) Se vi muovete per 10 m lungo una qualsiasi linea retta a partire dal polo nord, otterrete sempre lo stesso vettore spostamento?

(*b*) Se vi muovete verso nord per 10 m a partire da punti differenti posti sull'equatore, otterrete sempre lo stesso vettore spostamento?

14.22. Nella Fig. C, il disco a ghiaccio secco si muove prima di moto circolare e poi di moto rettilineo.

(*a*) Che cosa ha causato, secondo voi, questo cambiamento del moto?

(*b*) Il modulo della velocità sulla traiettoria circolare è uguale a quello sulla traiettoria rettilinea? Perché sì o perché no?

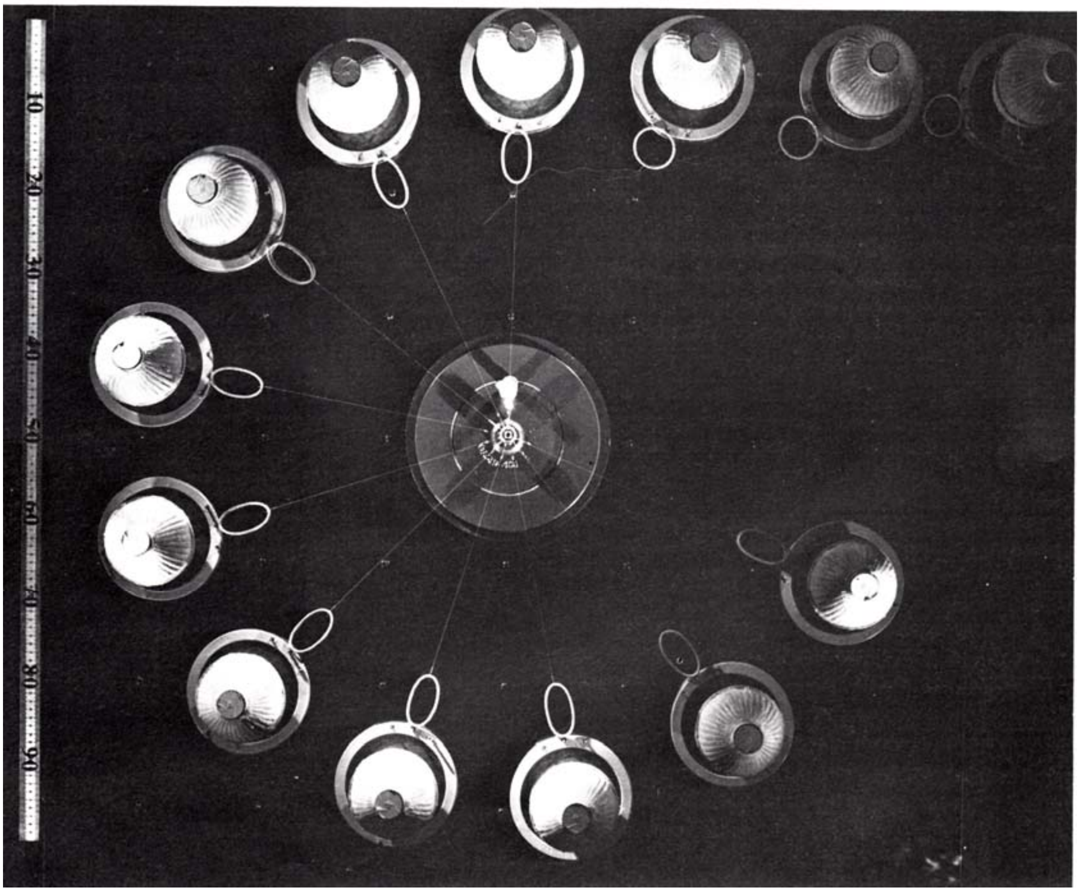


Fig. C

14.23. Supponete di avere tre aste lunghe 4.00, 5.00 e 6.00 m. Le aste vengono unite congiungendo le estremità a 90°.

(*a*) Qual è la distanza massima possibile tra le estremità non congiunte delle aste?

(*b*) I vettori spostamento si possono comporre in qualsiasi ordine e lo spostamento risultante è lo stesso. Perché in questo problema ottenete distanze diverse tra le estremità delle aste quando cambiate il loro ordine?

14.24. (*a*) Trovate il vettore somma di un vettore di 2 cm diretto verso est e di un vettore di 3 cm diretto verso nordovest.

(*b*) Trovate il vettore somma di un vettore di 8 cm verso est e un vettore di 12 cm verso nord-ovest.

(*c*) Confrontate i risultati dei punti (*a*) e (*b*) ed enunciate un teorema sulla composizione di due vettori che sono multipli di altri due vettori. Vi riesce di dimostrare questo teorema in generale?

14.25. In Fig. 14.14 misura la componente orizzontale dello spostamento della palla da golf durante ciascun intervallo di tempo fra due flash consecutivi. Verifica, quindi, che la componente orizzontale della velocità è la stessa in ogni intervallo di tempo.

14.26. Quando la palla di Fig. 14.14 interseca la linea bianca più bassa , quanto valgono:

(*a*) la componente del suo spostamento lungo l'orizzontale;

(*b*) la componente del suo spostamento lungo la verticale;

(*c*) la sua velocità.

14.27. Componenti $\mathbf{a}_t$ e $\mathbf{a}_c$:

(*a*) se il moto è uniforme, le due componenti sono sempre diverse da zero?

(*b*) se il moto è circolare, le due componenti sono sempre diverse da zero?

(c) se la **v** varia in modulo, la componente $\mathbf{a}_c$ deve esser diversa da zero?

(d) se la traiettoria è curvilinea, qualunque sia la legge del moto, la $\mathbf{a}_t$ deve essere diversa da zero?

(e) se la traiettoria è ellittica c'è $\mathbf{a}_c$?

14.28. Disegna una traiettoria curvilinea qualsiasi (un tratto della pista di Monza). Supponi che una macchina descriva questa traiettoria con moto uniforme. Disegna i vettori **v** e **a** in alcuni punti in due scale opportune per v e a.

14.29. La traiettoria disegnata in Fig. D è quella di un grave lanciato da A in un campo gravitazionale costante. Disegna i vettori **v**, **a**, $\mathbf{a}_t$, $\mathbf{a}_c$ nei punti A, B, C, D con opportune scale per v e a.

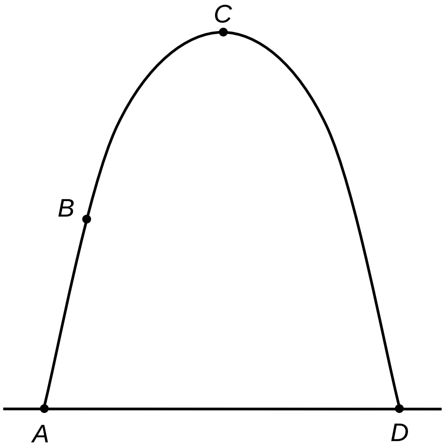


Fig. D

14.30. Un'automobile percorre una curva di 100 m di raggio con la velocità di 90 km/h. Quanto vale il modulo della sua accelerazione centripeta?

14.31. Una palla legata ad una corda si muove su una circonferenza orizzontale che ha il raggio di 2 m; essa compie un giro in 3 s. Se ne trovi l'accelerazione.

14.32. Un satellite percorre con velocità di modulo costante un'orbita circolare attorno al centro della terra, in prossimità della sua superficie. Se la sua accelerazione è 9.8 m/s^2, qual è il modulo della sua velocità e quanto tempo impiega per compiere un giro? ($R_T \cong 6370$ km)

14.33. Un corpo viaggia con velocità di modulo costante v su un percorso circolare di raggio r.

(a) Se v raddoppia, come varia l'accelerazione a?

(b) se raddoppia r, come varia a?

(c) Se il periodo dimezza come varia a?

14.34. Un ragazzo fa ruotare una palla legata ad una corda, descrivendo una circonferenza orizzontale di raggio 1.5 m.

(a) Quale deve essere la velocità della palla perché la sua accelerazione verso il centro della circonferenza abbia lo stesso modulo dell'accelerazione di gravità?

(b) A questa velocità quanti giri al minuto fa la palla?

14.35. Un'automobile percorre una curva avente il raggio di 40 m. La forza d'attrito fra la strada e i pneumatici è tale che la massima accelerazione possibile all'interno della curva è $0.8 \cdot g$. Si trovi la massima velocità dell'automobile mentre percorre la curva.