13. VETTORI DEL PIANO E DELLO SPAZIO

Usualmente i vettori vengono introdotti a partire dalla nota relazione di equivalenza Γ nell'insieme *A* dei segmenti orientati del piano o dello spazio. Si passa poi all'insieme quoziente *A*/Γ, detto insieme dei vettori *V*, e un elemento di questo insieme, cioè una classe di equivalenza, viene detto vettore. Un qualsiasi segmento orientato di una classe di equivalenza viene detto rappresentante del vettore.

13.1. Somma di vettori, metodo geometrico

Negli anni precedenti abbiamo imparato a fare la somma geometrica di due vettori e ad osservare alcune proprietà.

Possiamo ora dire che l'insieme dei vettori *V*(+) in cui è definita la operazione di somma assume la struttura di gruppo in quanto:
(*a*) l'insieme *V* è chiuso rispetto all'operazione +;
(*b*) l'operazione + gode della proprietà associativa;
(*c*) esiste l'elemento neutro rispetto all'operazione +, è il vettore nullo (indicato con **0**);
(*d*) per ogni vettore **v** esiste l'elemento inverso rispetto all'operazione +, è il vettore –**v**.
Godendo inoltre della proprietà commutativa si tratta di un gruppo abeliano. È normale quindi definire l'operazione inversa della somma, cioè la differenza, come: **u** – **v** = **u** + (–**v**).

13.2. Scomposizione e somma di vettori, metodo analitico

Il metodo geometrico per la somma di vettori non è di grande utilità per vettori in 3 dimensioni; anzi questo metodo si rivela già poco agevole in due dimensioni. Un altro metodo per sommare i vettori è quello analitico che consiste nella scomposizione di un vettore nelle sue componenti rispetto ad un particolare sistema di coordinate.

Nella Fig. 13.1 è disegnato un vettore **a** che parte dall'origine di un sistema di coordinate ortogonali. Se dalla punta di **a** si tracciano le perpendicolari agli assi, si ottengono le grandezze a_x e a_y che vengono dette le *componenti* del vettore **a**. Il procedimento seguito prende il nome di scomposizione di un vettore nelle sue componenti. La Fig. 13.1 mostra per semplicità il caso bidimensionale; è ovvia l'estensione al caso di un vettore nello spazio tridimensionale.

Uno stesso vettore può avere diversi gruppi di componenti a seconda del sistema di riferimento adottato. Le componenti di un vettore sono univocamente determinate solo se si precisa il sistema di coordinate usato.

Per determinare le componenti non è necessario che il rappresentante del vettore sia tracciato a partire dall'origine del sistema di coordinate, anche se per comodità lo si è fatto; un vettore può essere spostato a piacere nello spazio delle coordinate e, se non muta l'angolo che esso forma con gli assi coordinati, le sue componenti restano invariate.

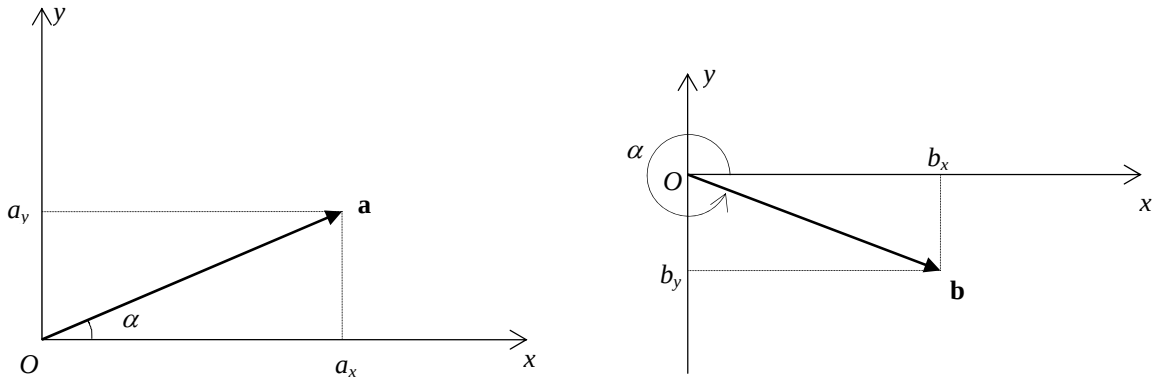

Fig. 13.1.

Le componenti a_x e a_y nella Fig. 13.1 si ricavano facilmente da

$$a_x = a\cdot\cos\alpha \qquad a_y = a\cdot\sin\alpha \qquad [13.1]$$

se α è l'angolo formato dal vettore **a** con l'asse x positivo, misurato in senso antiorario dall'asse; si noti che a_x e a_y, a seconda del valore dell'angolo, possono essere sia positive che negative. Per esempio in Fig. 13.1 b_x è >0 e b_y è <0. Da notare che le componenti del vettore sono scalari con il segno.

Quando un vettore è stato scomposto nelle sue componenti, le componenti stesse possono essere utilizzate per individuare il vettore; dalla Fig. 13.1 si vede facilmente che:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad \tan\alpha = \frac{a_y}{a_x} \qquad (\sin\alpha = \frac{a_y}{a} \quad \text{e} \quad \cos\alpha = \frac{a_x}{a}) \qquad [13.2]$$

il quadrante in cui giace il vettore è determinato dal segno di a_x e a_y.

È quindi possibile passare indifferentemente da una descrizione analitica del vettore mediante le sue componenti a_x e a_y alla equivalente descrizione geometrica mediante *modulo a e direzione* α.

Per scomporre un vettore nelle sue componenti è spesso utile introdurre un vettore di lunghezza unitaria avente una particolare direzione. Così il vettore **a** di Fig. 13.2 (*a*) si può scrivere come

$$\mathbf{a} = a\cdot\mathbf{u}_a \qquad (\text{ oppure } \mathbf{a} = a\cdot\hat{\mathbf{u}}\ ) \qquad [13.3]$$

dove $\mathbf{u}_a$ è un *vettore unitario* o *versore* nella direzione di **a**.

Spesso conviene tracciare i versori degli assi coordinati scelti. Nel sistema di coordinate ortogonali si usano di solito i simboli **i**, **j** e **k** per indicare rispettivamente i versori degli assi x, y e z, come è mostrato in Fig. 13.2 (*b*). Si noti che non è necessario che i versori **i**, **j** e **k** siano applicati all'origine. Come tutti i vettori, essi possono essere traslati a piacere nello spazio delle coordinate a condizione che si mantengano inalterate le loro direzioni rispetto agli assi coordinati.

I vettori **a** e **b** di Fig. 13.1 possono essere espressi in funzione delle loro componenti e dei versori come:

$$\mathbf{a} = a_x\cdot\mathbf{i} + a_y\cdot\mathbf{j} \qquad [13.4]$$

e

$$\mathbf{b} = b_x\cdot\mathbf{i} + b_y\cdot\mathbf{j} \qquad [13.5]$$

come si può dedurre dalla Fig. 13.3.

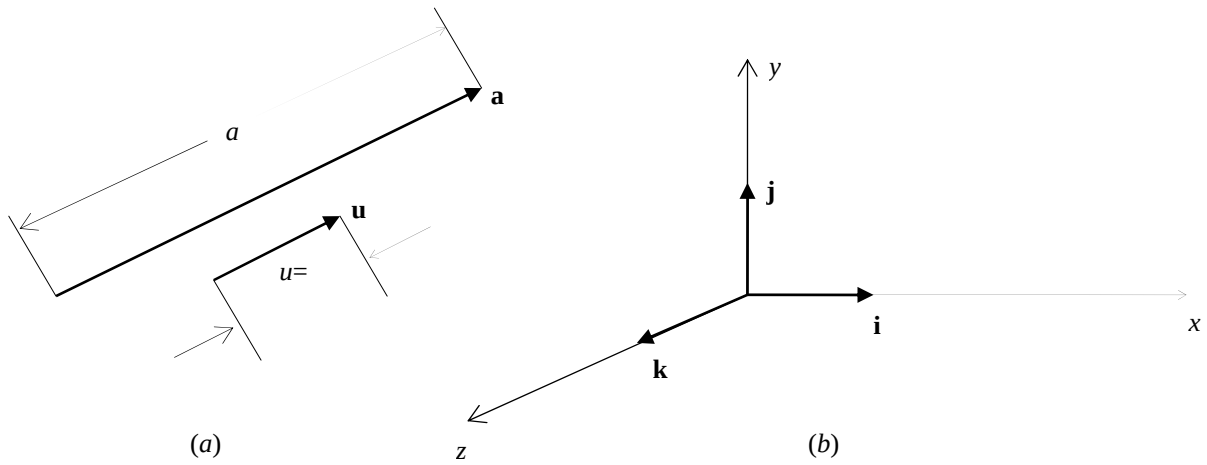

Fig. 13.2.

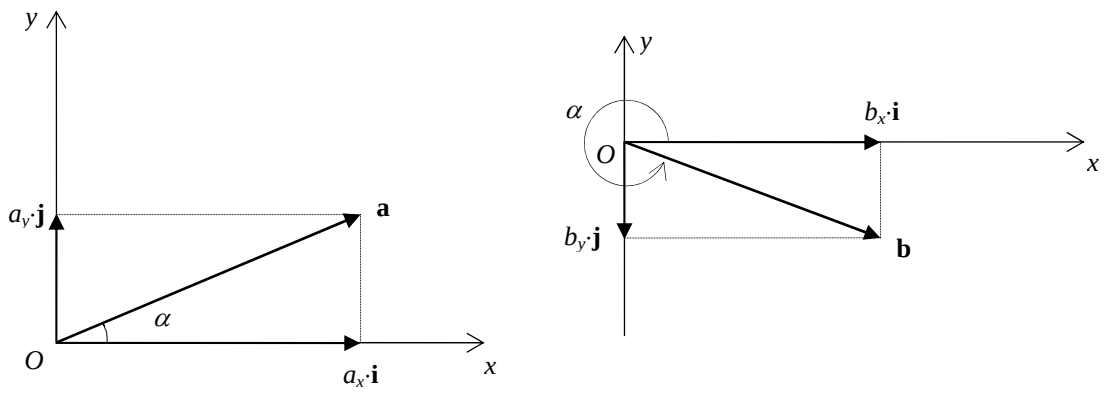

Fig. 13.3.

La relazione vettoriale [13.4] è equivalente a quelle scalari [13.2]; entrambe collegano il vettore **a** (o *a* e α) alle sue componenti (a_x e a_y). Talvolta le quantità $a_x \cdot \mathbf{i}$ e $a_y \cdot \mathbf{j}$ dell'equazione [13.4] vengono chiamate componenti vettoriali di **a** o i *componenti* di **a** e sono disegnati come vettori. La parola componente da sola si riferirà invece alle quantità scalari a_x e a_y.

Consideriamo ora la somma di vettori con il metodo analitico. Sia **r** la somma di due vettori **a** e **b** giacenti sul piano *x-y* in modo tale che

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \qquad [13.6]$$

In un dato sistema di coordinate due vettori **r** e **a + b** sono uguali solo se lo sono le corrispondenti componenti, ovvero solo se

$$\begin{cases} r_x = a_x + b_x \\ r_y = a_y + b_y \end{cases} \qquad [13.7]$$

Queste due equazioni algebriche, prese insieme, equivalgono alla relazione vettoriale [13.6] che può così essere riscritta:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} = \\ &= (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j} \end{aligned} \qquad [13.8]$$

Si può così enunciare la seguente regola analitica per la somma di vettori: si scompone ciascun vettore nelle sue componenti in un dato sistema di coordinate; la somma algebrica delle singole componenti secondo un determinato asse è la componente del vettore somma secondo quell'asse; note così le sue componenti, il vettore somma può essere ricostruito. Questo metodo di somma vettoriale può essere generalizzato a più vettori e allo spazio tridimensionale o *n*-dimensionale.

Nel sommare i vettori con il metodo analitico, la scelta del sistema di coordinate può semplificare o complicare il procedimento matematico. Talvolta le componenti di un vettore rispetto ad un particolare sistema di riferimento sono note sin dall'inizio, cosicché la scelta del sistema di coordinate è ovvia. Altre volte una scelta oculata degli assi può semplificare notevolmente la scomposizione del vettore nelle sue componenti. Per esempio gli assi possono essere orientati in modo che almeno uno dei vettori in esame sia parallelo ad un asse.

Esempio svolto

Tre vettori complanari sono espressi in un sistema di coordinate ortogonali dalle seguenti relazioni:

$\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$ $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ $\mathbf{c} = -3\mathbf{j}$

dove le componenti sono date in unità arbitrarie. Si determini il vettore risultante, somma di questi 3 vettori.

Soluzione:

Dalle equazioni [13.7] si ottiene:

$$r_x = a_x + b_x + c_x = 4 - 3 + 0 = 1$$
$$r_y = a_y + b_y + c_y = -1 + 2 - 3 = -2$$

e perciò:

$$\mathbf{r} = r_x\mathbf{i} + r_y\mathbf{j} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$$

La Fig. A mostra i quattro vettori.

Dalle equazioni [13.2] possiamo calcolare anche l'intensità del vettore **r** che è $\sqrt{5}$, e l'angolo formato da **r** con l'asse x positivo, misurato in senso antiorario a partire da tale asse:

$$\tan\alpha = -2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan(-2) = 297°$$

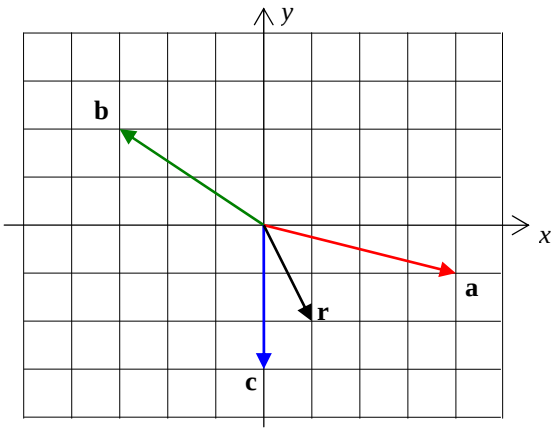

Fig. A.

13.3. Vettore opposto; metodo analitico

È immediato constatare che se

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} \qquad [13.9]$$

il vettore

$$-\mathbf{a} = -a_x\,\mathbf{i} + (-a_y)\mathbf{j} \qquad [13.10]$$

cioè le componenti di $-\mathbf{a}$ sono uguali ed opposte alle componenti di **a**.

13.4. Prodotto di un numero reale per un vettore: metodo analitico

Anche in questo caso se:

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} \qquad [13.11]$$

il vettore

$$h\mathbf{a} = h\,a_x\,\mathbf{i} + h\,a_y\,\mathbf{j} \qquad [13.12]$$

cioè le componenti del vettore $h\mathbf{a}$ si ottengono moltiplicando per il numero h le componenti di **a**.

Problemi di fine capitolo

13.1. Trovare la somma dei vettori spostamento **c** e **d** le cui componenti in km sono:
$c_x = 5.0$, $c_y = 0$, $c_z = 2.0$; $d_x = -3.0$, $d_y = 4.0$, $d_z = 6.0$.

13.2. La componente *x* di un certo vettore è di +5 unità e la componente *y* di +4 unità. Trovare il modulo del vettore e l'angolo che esso forma con l'asse *x* positivo.

13.3. La componente *x* di un certo vettore è di –25 unità e la componente *y* di +40 unità. Trovare il modulo del vettore e l'angolo che esso forma con l'asse *x* positivo. [47 unità; 122°]

13.4. La componente *x* di un certo vettore è di –2 unità e la componente *y* di –4 unità. Trovare il modulo del vettore e l'angolo che esso forma con l'asse *x* positivo.

13.5. Dati due vettori **a** = 4**i** – 3**j** e **b** = 6**i** +8**j** determinare le componenti dei vettori **a**+**b**, **a**–**b**, e **b**–**a** e, inoltre, modulo e direzione dei vettori **a**, **b**, **a**+**b**, **b**–**a**, e **a**–**b**.
[I moduli sono: 5,10,11,11, 11; gli angoli formati con l'asse *x* positivo sono: 323°,53°,27°,80°,260°]

13.6. Dati due vettori **a** = –4**i** + 3**j** e **b** = –6**i** +4**j** determinare le componenti dei vettori **a**+2**b**, **a**–0.5**b**, 2**b**–3**a** e, inoltre, modulo e direzione dei vettori **a**, **b**, **a**+2**b**.

13.7. Trovare le componenti di un vettore **A** che giace nel piano *x*-*y*, con direzione che forma un angolo di 250° rispetto all'asse *x* positivo e il cui modulo è di 7.3 unità.

13.8. Due vettori **a** e **b** hanno lo stesso modulo di 10 unità. Essi sono orientati come nella Fig. B e il loro risultante è **r**. Determinare:
(*a*) le componenti di **r** secondo gli assi *x* e *y*;
(*b*) l'intensità o modulo di **r**;
(*c*) l'angolo che **r** forma con l'asse *x*.
[(*a*) r_x=1.6; r_y=12; (*b*) 12.2 unità; (*c*) 84°]

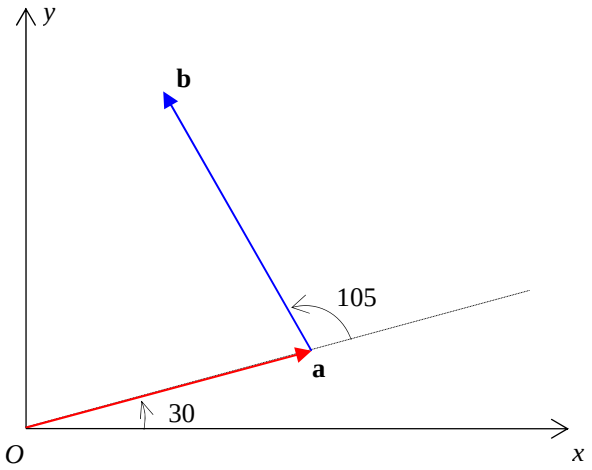

Fig. B.

13.9. Un vettore ha componenti (2;2) rispetto ad un certo sistema di riferimento.
(*a*) Qual è il modulo del vettore?
(*b*) Se poi si usa un sistema di riferimento ruotato rispetto al primo, di 45° in senso orario, quali saranno le nuove componenti del vettore?
(*c*) Quanto vale il modulo del vettore nel nuovo sistema?
[(*a*) $2\sqrt{2}$; (*b*) $(0;2\sqrt{2})$; (*c*) *resta uguale*]