

15. MOTO DEL PROIETTILE

15.1. Moto in due dimensioni

Esaminiamo il parere di Galileo riguardo a ciò che egli fece nel risolvere il problema del moto dei proiettili (e di conseguenza lo studio del moto qualsiasi di un corpo nel piano e nello spazio). La soluzione di Galileo riguardo al problema del moto dei proiettili nel limite ideale in cui si annulla la resistenza dell'aria rappresenta, nella storia della scienza, uno dei primissimi esempi di uso cosciente del principio di sovrapposizione dei moti; nelle *Nuove scienze* egli descrive questa impostazione, e la sua importanza concettuale, con estrema chiarezza:

In precedenza abbiamo considerato gli eventi che accadono nel moto rettilineo uniforme e anche nel moto uniformemente accelerato [...] Ora tenterò di presentare ciò che accade a un corpo il cui moto sia composto da due movimenti, cioè uno uniforme e uno accelerato [...] d'altra parte, di tale sorta sembra essere quel movimento che chiamiamo moto del proiettile; la cui origine penso che sia di tale genere.

Immagino un qualunque corpo mobile proiettato lungo un piano orizzontale da cui sia tolto ogni impedimento: [...] il suo moto su quel piano sarà uniforme e perpetuo, purché esso si estenda all'infinito; ma se il piano sarà limitato e sollevato da terra il corpo in movimento, che immagino dotato di gravità, una volta giunto al limite del piano, procedendo oltre, aggiungerà al moto uniforme e indelebile precedente la propria propensione verso il basso dovuta al proprio peso; in questo modo il movimento risulta composto da un moto orizzontale uniforme e da un altro naturalmente accelerato rivolto verso il basso.

Le frasi portanti nella citazione precedente sono «movimento risultante» e «composto da». Con questi termini, illusoriamente semplici, Galileo rivela la grande distanza che ha posto tra sé e l'idea, difesa dalla filosofia scolastica, secondo cui il moto era visto solo come un tutto unico, e non veniva mai pensato come qualcosa di composto. Queste frasi esprimono anche la sua intuizione (basata sull'induzione) secondo cui i moti orizzontale e verticale del proiettile non si influenzano l'uno con l'altro; per Galileo, cioè, essi si comportano come se ognuno di loro fosse il solo presente e l'effetto netto è una semplice combinazione dei due moti indipendenti calcolati separatamente. Questa è un'ipotesi riguardante la *fisica* del fenomeno, e non solo una questione di definizione; è richiesta una verifica sperimentale, esattamente come per l'ipotesi secondo cui la caduta libera è uniformemente accelerata.

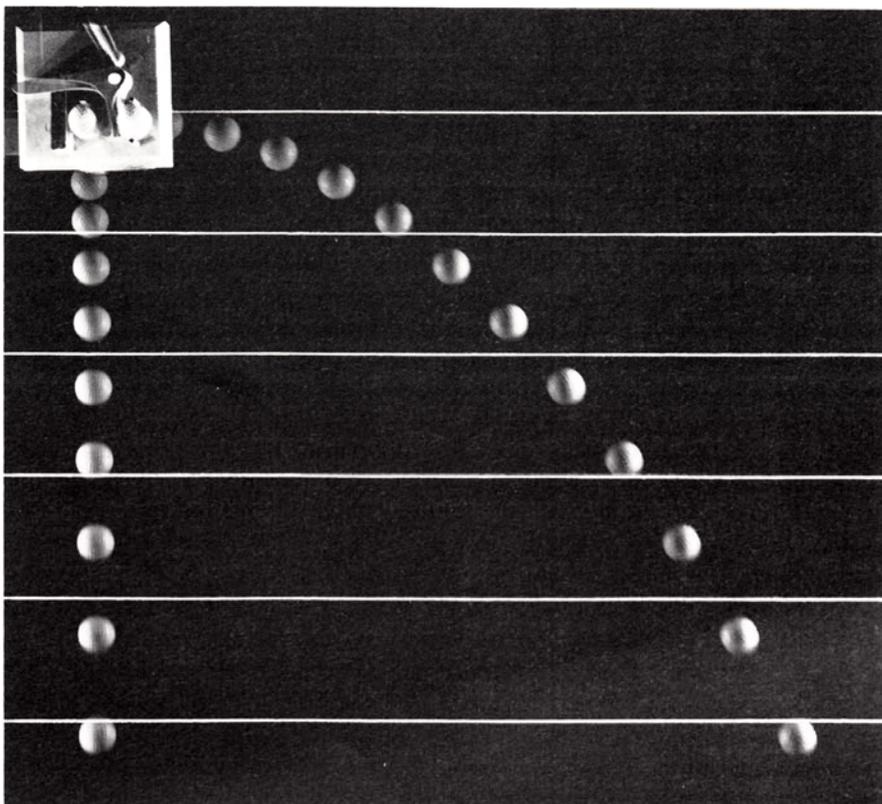


Fig. 15.1. Fotografia multiframe di due palle da golf, una lanciata orizzontalmente nello stesso istante in cui l'altra veniva lasciata cadere. Le linee di riferimento distano fra loro 15 cm e l'intervallo di tempo tra due lampi consecutivi è di 1/30 s.

Per giustificare l'uso della sovrapposizione dei moti, dobbiamo rispondere a *due* domande distinte:

- (1) imprimere una velocità orizzontale a una particella altera in qualche maniera l'accelerazione verticale e le velocità che il corpo acquista normalmente cadendo in linea retta?
- (2) al contrario, la presenza di un'accelerazione e di una velocità verticali modifica in qualche maniera il moto orizzontale di una particella?

Si deve sottolineare che queste sono, in effetti, due domande *distinte* e che, se la risposta a una di esse è negativa, la cosa non implica automaticamente che la stessa risposta valga anche per l'altra.

Naturalmente Galileo non era in grado di verificare sperimentalmente queste condizioni con un grado di precisione molto elevato (sebbene egli dichiarò che un oggetto lasciato cadere dall'albero di una nave in movimento colpisce il ponte alla base dell'albero). Egli doveva fidarsi principalmente sulla consistenza interna della teoria e sul fatto che i risultati derivati da tali idee erano complessivamente in accordo con i dati sperimentali. In questa era moderna di strumenti elettronici e di fotografia ad alta velocità è possibile invece fare test diretti che possono essere mostrati agli studenti. Una risposta negativa alla domanda (1) viene dalle fotografie stroboscopiche tipo quella di Fig. 15.1 che mostrano due sfere che vengono lasciate andare nello stesso istante, una lungo la verticale e l'altra con una velocità iniziale orizzontale: in tali fotografie si vede chiaramente che le sfere sono sempre alla stessa quota verticale in intervalli di tempo successivi. Una risposta negativa alla domanda (2) proviene invece da filmati che mostrano come un oggetto lasciato cadere da un albero di una nave o da un piedistallo verticale che si muove con velocità uniforme cada direttamente lungo l'albero e tocchi terra alla sua base.

15.2. Analisi di moti piani (formalizzazione)

Consideriamo il moto in due dimensioni di Fig. 15.2, per semplicità nel piano xOy .

Possiamo dire che un moto piano è completamente determinato quando si conoscono per ogni istante i vettori:

$$\mathbf{r}(t) \quad \mathbf{v}(t) \quad \mathbf{a}(t)$$

calcolati rispetto ad un opportuno sistema di riferimento.

In base a quanto osservato da Galilei possiamo sempre pensare un qualsiasi moto piano come la sovrapposizione di due moti rettilinei uno lungo l'asse x e l'altro lungo l'asse y di un sistema di riferimento opportunamente fissato, descritti rispettivamente da $x(t)$, $v_x(t)$, $a_x(t)$ e da $y(t)$, $v_y(t)$, $a_y(t)$.

Diciamo allora che un moto è completamente determinato quando conosciamo tutte le componenti lungo gli assi:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= x(t)\cdot\mathbf{i} + y(t)\cdot\mathbf{j} \\ \mathbf{v}(t) &= v_x(t)\cdot\mathbf{i} + v_y(t)\cdot\mathbf{j} \\ \mathbf{a}(t) &= a_x(t)\cdot\mathbf{i} + a_y(t)\cdot\mathbf{j} \end{aligned} \quad [15.1]$$

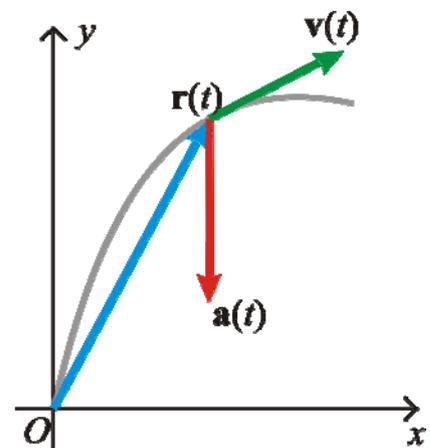


Fig. 15.2. Moto in due dimensioni.

15.3. Moto piano con accelerazione costante

Consideriamo dapprima il caso particolare di un moto piano con accelerazione \mathbf{a} costante. È il caso in cui, mentre il punto materiale si muove, l'accelerazione \mathbf{a} non varia né in modulo né in direzione. Anche le componenti di \mathbf{a} non variano, cioè sarà $a_x = \text{costante}$ e $a_y = \text{costante}$. Si ha allora una situazione in cui il moto può essere descritto come la sovrapposizione di due moti componenti che avvengono contemporaneamente con accelerazione costante in due direzioni perpendicolari. In generale il punto materiale descriverà nel piano una traiettoria curvilinea.

Questo si verifica anche nel caso in cui una componente dell'accelerazione, per es. a_x , sia nulla perché la corrispondente componente della velocità, v_x , può essere costante e diversa da zero. Un esempio di quest'ultimo caso è il moto di un proiettile che descrive una traiettoria curva in un piano verticale e, trascurando gli effetti della resistenza dell'aria, è soggetto ad una accelerazione costante \mathbf{g} diretta verso il basso lungo l'asse y . Possiamo ricavare le equazioni di un moto piano con accelerazione costante \mathbf{a} ponendo

$$a_x = \text{costante} \quad \text{e} \quad a_y = \text{costante}. \quad [15.2]$$

Le equazioni del moto uniformemente accelerato, sono ora applicabili per le componenti secondo i due assi x e y , del vettore accelerazione \mathbf{a} , del vettore velocità \mathbf{v} e del vettore posizione \mathbf{r} .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}(t) &= a_x(t)\cdot\mathbf{i} + a_y(t)\cdot\mathbf{j} = a_x\cdot\mathbf{i} + a_y\cdot\mathbf{j} \\
 \mathbf{v}(t) &= v_x(t)\cdot\mathbf{i} + v_y(t)\cdot\mathbf{j} = (v_{x0} + a_x\cdot t)\cdot\mathbf{i} + (v_{y0} + a_y\cdot t)\cdot\mathbf{j} \\
 \mathbf{r}(t) &= x(t)\cdot\mathbf{i} + y(t)\cdot\mathbf{j} = (x_0 + v_{x0}\cdot t + \frac{1}{2} a_x\cdot t^2)\cdot\mathbf{i} + (y_0 + v_{y0}\cdot t + \frac{1}{2} a_y\cdot t^2)\cdot\mathbf{j}
 \end{aligned}
 \tag{15.3}$$

Tab. 15.1. Moto uniforme-accelerato nel piano x - y

Equazioni del moto sull'asse x	Equazioni del moto sull'asse y
$a_x = cost$	$a_y = cost$
$v_x(t) = v_{0x} + a_x\cdot t$	$v_y(t) = v_{0y} + a_y\cdot t$
$x(t) = x_0 + v_{0x}\cdot t + \frac{1}{2} a_x\cdot t^2$	$y(t) = y_0 + v_{0y}\cdot t + \frac{1}{2} a_y\cdot t^2$

I due gruppi di equazioni precedenti sono collegati per il fatto che il parametro tempo t è lo stesso per entrambi, dato che t rappresenta l'istante in cui il punto materiale, muovendosi su una traiettoria curvilinea nel piano x - y , occupa la posizione descritta dalle componenti x e y .

La traiettoria è individuata dal sistema di equazioni

$$\begin{cases}
 x(t) = x_0 + v_{0x}\cdot t + \frac{1}{2} a_x\cdot t^2 \\
 y(t) = y_0 + v_{0y}\cdot t + \frac{1}{2} a_y\cdot t^2
 \end{cases}
 \tag{15.4}$$

che istante per istante forniscono le coordinate del punto che si sta muovendo, cioè la traiettoria.

Esempio svolto

Supponendo che le coordinate di un punto in moto, rispetto ad un sistema di riferimento fissato, siano:

$$x(t) = 2 \text{ m} + 4 \text{ m/s}\cdot t \quad \text{e} \quad y(t) = 3 \text{ m/s}^2\cdot t^2$$

determinare tutte le altre equazioni del moto e l'equazione cartesiana $y = f(x)$ della traiettoria.

Soluzione:

Dal confronto con la Tab. 15.1 si ottiene:

Equazioni del moto sull'asse x	Equazioni del moto sull'asse y
$x_0 = 2\text{m}; v_{0x} = 4 \text{ m/s}; a_x = 0 \text{ m/s}^2$	$y_0 = 0; v_{0y} = 0 \text{ m/s}; a_y = 6 \text{ m/s}^2$
$v_x(t) = 4 \text{ m/s}$	$v_y(t) = 6 \text{ m/s}^2\cdot t$

Per l'equazione della traiettoria si ricava t :

$$t = \frac{x - 2\text{m}}{4 \text{ m/s}} \quad \text{e lo si sostituisce nell'altra equazione: } y = 3 \text{ m/s}^2 \cdot \left(\frac{x - 2\text{m}}{4 \text{ m/s}} \right)^2$$

Quesiti

15.1. Le componenti del vettore posizione di un corpo che si muove in un piano x - y sono:

$$x = 3\text{m} \quad \text{e} \quad y = 2\text{m/s}\cdot t.$$

Determinare:

- il vettore posizione (componenti e modulo) negli istanti $t = 0\text{s}, 1\text{s}, 2\text{s}, 4\text{s}, 5\text{s}$;
- il vettore spostamento (componenti e modulo) dall'inizio del moto all'istante $t = 5\text{s}$;
- il tipo di traiettoria.

15.2. Le componenti del vettore posizione di un corpo che si muove in un piano x - y sono:

$$x(t) = -2 \text{ m} + (3\text{m/s})\cdot t \quad \text{e} \quad y(t) = (2\text{m/s})\cdot t.$$

Determinare:

- il vettore posizione (componenti e modulo) negli istanti $t = 0, 1\text{s}, 3\text{s}, 4\text{s}, 5\text{s}$;
- il vettore spostamento (componenti e modulo) dall'inizio del moto all'istante $t = 5\text{s}$;
- il tipo di traiettoria.

15.3. Le componenti della velocità di un corpo che si muove in un piano x - y sono:

$$v_x = 1\text{m/s} \quad \text{e} \quad v_y = 2\text{m/s} + (-1\text{m/s}^2)\cdot t.$$

Determinare il vettore velocità (componenti e modulo) negli istanti $t = 0, 1\text{s}, 2\text{s}, 3\text{s}, 4\text{s}, 5\text{s}$.

15.4. Un corpo è al centro di un sistema di assi cartesiani xOy . Esso possiede una velocità di componenti:

$$v_x = 3 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad v_y = 4 \text{ m/s}.$$

Determinare:

(a) il vettore velocità (componenti e modulo) negli istanti $t = 0, 1\text{s}, 2\text{s}, 3\text{s}, 4\text{s}$;

(b) il vettore posizione (componenti e modulo) negli istanti $t = 0, 1\text{s}, 2\text{s}, 3\text{s}, 4\text{s}$.

15.5. L'espressione del vettore posizione, le cui componenti sono espresse in metri, è la seguente:

$$\mathbf{r}(t) = (2 \text{ m} + (1 \text{ m/s}) \cdot t) \cdot \mathbf{i} + ((4 \text{ m/s}) \cdot t + (-5 \text{ m/s}^2) \cdot t^2) \cdot \mathbf{j}.$$

Determinare:

(a) Determinare l'equazione della traiettoria del moto. Di che tipo di traiettoria si tratta?

(b) Determinare il vettore posizione, il vettore velocità e il vettore accelerazione all'inizio del moto, dopo 2s e dopo 4s.

15.6. Determinare la traiettoria, i vettori posizione, velocità e accelerazione negli istanti $t=0\text{s}, t=1\text{s}, t=4\text{s}$, del moto caratterizzato dalla seguente legge oraria:

$$\mathbf{r}(t) = (2 \text{ m/s} \cdot t) \cdot \mathbf{i} + (-1 \text{ m/s}^2 \cdot t^2) \cdot \mathbf{j}.$$

Determinare infine $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{a}(t)$.

15.7. Determinare la traiettoria, i vettori posizione, velocità e accelerazione negli istanti $t=0\text{s}, t=2\text{s}, t=4\text{s}$, del moto caratterizzato dalla seguente legge oraria:

$$\mathbf{r}(t) = (0.5 \text{ m/s}^2 \cdot t^2) \cdot \mathbf{i} + (2 \text{ m/s}^2 \cdot t^2) \cdot \mathbf{j}.$$

Determinare infine $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{a}(t)$.

15.8. Un punto materiale parte dall'origine con una velocità iniziale $\mathbf{v}_0 (= 3.0 \text{ m/s})$ nella direzione dell'asse x positivo. È soggetto ad una accelerazione costante $\mathbf{a} = -1.0 \text{ m/s}^2 \cdot \mathbf{i} - 0.5 \text{ m/s}^2 \cdot \mathbf{j}$.

(a) Dopo aver individuato il tipo di moto su ciascun asse, scrivere le equazioni per $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{r}(t)$ mediante le componenti.

(b) Qual è la velocità del punto quando raggiunge il valore massimo della coordinata x ?

(c) Dove si trova il punto in quel momento?

15.9. Un punto materiale parte dall'origine. La sua velocità varia nel tempo secondo la seguente legge oraria:

$$\mathbf{v}(t) = (3.0 \text{ m/s} + 1.0 \text{ m/s}^2 \cdot t) \cdot \mathbf{i} + (-0.5 \text{ m/s}) \cdot \mathbf{j}.$$

Dopo avere individuato il tipo di moto su ciascun asse, scrivere le equazioni per $\mathbf{a}(t)$ e $\mathbf{r}(t)$ mediante le componenti.

15.10. L'equazione $F = m \cdot a^2 \cdot d$, dove d indica una distanza, può rappresentare una legge fisica? Spiegare.

15.4. Il moto dei proiettili

Quando la resistenza dell'aria è trascurabile, i corpi che cadono verticalmente verso il basso sotto l'influenza dell'attrazione gravitazionale cadono tutti con la stessa accelerazione. Se i corpi si muovessero vicino alla superficie della Terra anche in altre direzioni, cadrebbero ancora con la stessa accelerazione?

La Fig. 15.1 presenta una cronofotografia di due palline. La prima pallina ha cominciato a cadere partendo da ferma nell'istante in cui la seconda pallina è stata lanciata orizzontalmente.

Si vede che i moti verticali delle due palline sono identici nonostante che i loro moti orizzontali siano diversi. Si nota inoltre che il moto orizzontale si svolge a velocità orizzontale costante, come il moto in assenza di forze.

La forza orientata verso il basso non fa variare il moto orizzontale e il moto orizzontale non cambia l'effetto della forza sul moto verticale. Il moto orizzontale e il moto verticale sono indipendenti come ci si attende in base alla natura vettoriale della legge di Newton (paragrafo 14.7). Il moto verticale deriva dalla componente verticale della forza e il moto orizzontale dalla componente orizzontale: $\mathbf{F}_{\text{verticale}} = m\mathbf{g}$ e $\mathbf{F}_{\text{orizzontale}} = \mathbf{0}$. Il moto orizzontale è privo di

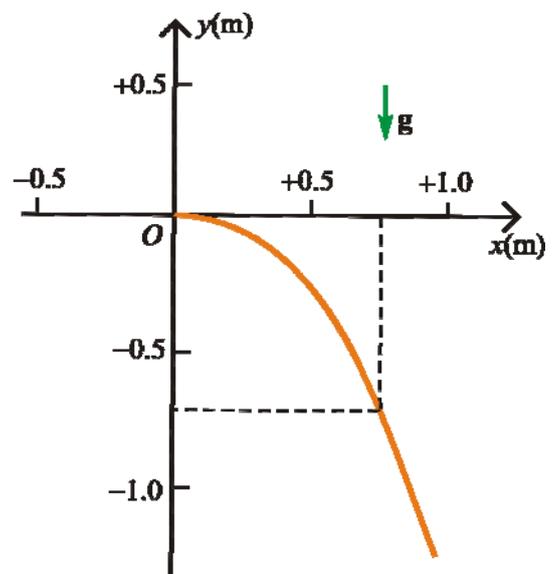


Fig. 15.3. La traiettoria della pallina della Fig. 15.1 è rappresentata in un sistema di assi coordinati. L'ascissa x della pallina in un istante qualsiasi t è $v_0 t$ (dove $v_0 = 2.0 \text{ m/s}$) e la sua ordinata y è $-1/2 g \cdot t^2$. Per esempio, quando $t=0.38 \text{ s}$, allora $x=0.76 \text{ m}$ e $y = -0.71 \text{ m}$.

accelerazione e il moto verticale è uguale al moto di caduta libera.

Studiando il moto della pallina di destra nella Fig. 15.1, abbiamo incontrato un nuovo interessante problema: determinare la traiettoria della pallina. Se si conosce la posizione e la velocità di un corpo a un dato istante, si può dedurre la traiettoria in funzione del tempo dalla legge del moto di Newton e dalla forza che agisce sul corpo. Però nel caso del proiettile della Fig. 15.1 non dobbiamo risalire alla legge di Newton e alla forza gravitazionale, ma possiamo determinare la traiettoria combinando il moto verticale e il moto orizzontale che conosciamo.

Come abbiamo visto nel paragrafo 15.1, essi si svolgono indipendentemente.

Per determinare la traiettoria scegliamo un asse di riferimento orizzontale (l'asse x) e un asse di riferimento verticale (l'asse y), disponendoli in modo che l'origine ($x = 0, y = 0$) sia l'origine della traiettoria, cioè il punto da cui viene lanciato il corpo (Fig. 15.3).

Quando la pallina viene lanciata con velocità orizzontale v_0 sappiamo che essa continua a muoversi lungo la direzione x con questa velocità. Perciò dopo un intervallo di tempo t , la coordinata x della posizione della pallina è

$$x = v_0 \cdot t. \quad [15.5]$$

Sappiamo anche che il moto verticale è uguale al moto di caduta libera. Perciò, la coordinata y nello stesso istante t è:

$$y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad [15.6]$$

Il segno meno dice semplicemente che la pallina si muove verso il basso, anziché verso l'alto.

Queste equazioni contengono tutte le informazioni sul moto dei corpi lanciati orizzontalmente con una velocità iniziale v_0 . Il valore comune del tempo t nelle equazioni indica che si tratta del un singolo corpo, anziché del moto di due corpi diversi.

La traiettoria descritta dal corpo è una curva e la corrispondente espressione, che mette in relazione la componente verticale y con la componente orizzontale x , si può ricavare eliminando il tempo t dalle equazioni [15.5] e [15.6].

Dalla relazione [15.5] si ricava che $t = x/v_0$. Introducendo questa espressione nella relazione [15.6], si ottiene:

$$y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 = -\frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = -\frac{g}{v_0^2} \cdot x^2 \quad [15.7]$$

La relazione

$$y = -\frac{g}{v_0^2} \cdot x^2 \quad [15.8]$$

è l'equazione della traiettoria del corpo. Come è illustrato nella Fig. 15.3, la traiettoria è una parabola con il vertice nel punto di lancio del proiettile.

Nella Fig. 15.4, sono state rappresentate alcune traiettorie possibili che corrispondono a differenti valori della velocità orizzontale iniziale v_0 . Si può vedere che quando la velocità orizzontale è elevata, la parabola ha una grande curvatura e il proiettile percorre un tratto orizzontale maggiore di quello verticale. D'altra parte, per piccoli valori di v_0 si hanno parabole con una piccola curvatura e il proiettile percorre un tratto orizzontale minore di quello verticale.

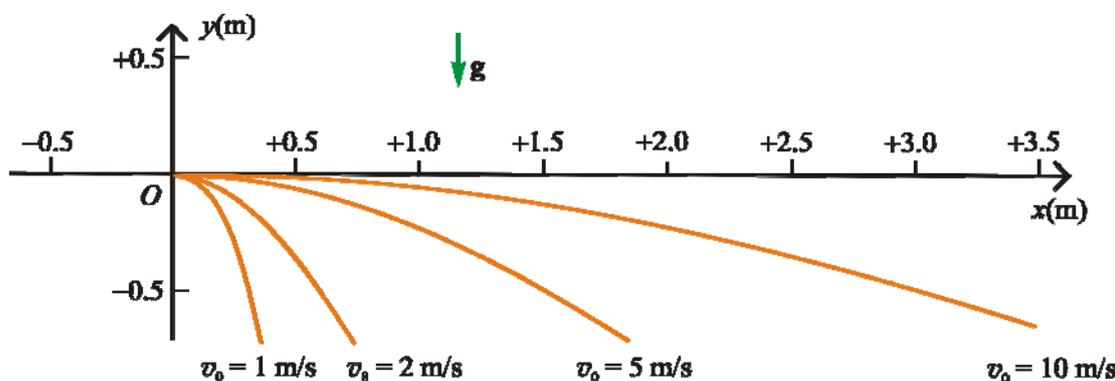


Fig. 15.4. Alcune traiettorie possibili per un corpo lanciato in direzione orizzontale. È importante notare che la forma della parabola dipende dalla velocità orizzontale v_0 .

Quesiti

- 15.11. Come si può stabilire che la componente orizzontale della velocità della pallina, lanciata orizzontalmente nella Fig. 15.1, è costante, mentre la componente verticale non lo è?
- 15.12. Come si può stabilire che sulle palline nella Fig. 15.1 si esercita una forza costante orientata verticalmente verso il basso?
- 15.13. Nella Fig. 15.4, tutti i corpi sono stati in moto per lo stesso tempo al termine delle traiettorie indicate?
- 15.14. Con quale valore del modulo della velocità orizzontale dovrebbe essere lanciato il corpo della Fig. 15.4 affinché passi per il punto (1.0 ; -0.5)?

15.5. Approfondimenti sul moto di un proiettile

Il caso più generale è quello di un proiettile lanciato con velocità iniziale \mathbf{v}_0 che formi un angolo qualsiasi θ_0 con l'orizzontale. Anche questo caso ovviamente può essere trattato tenendo presente che i moti in direzione verticale e in direzione orizzontale sono indipendenti. Il moto ideale di una palla da baseball o da golf è un tipico esempio di moto del proiettile. Una ipotesi semplificativa è che la resistenza dell'aria in questo moto possa essere trascurata. Il moto di un proiettile è caratterizzato da accelerazione costante \mathbf{g} diretta verso il basso. Non vi è alcuna componente orizzontale della accelerazione nella ipotesi di assenza di attrito.

Se si sceglie un sistema di riferimento (Fig. 15.5) la cui origine coincida con il punto in cui il proiettile inizia il suo volo (cioè con il punto in cui la palla lascia la mano del lanciatore o la mazza da golf), le equazioni del moto si possono scrivere in termini dei versori \mathbf{i} e \mathbf{j} nel seguente modo:

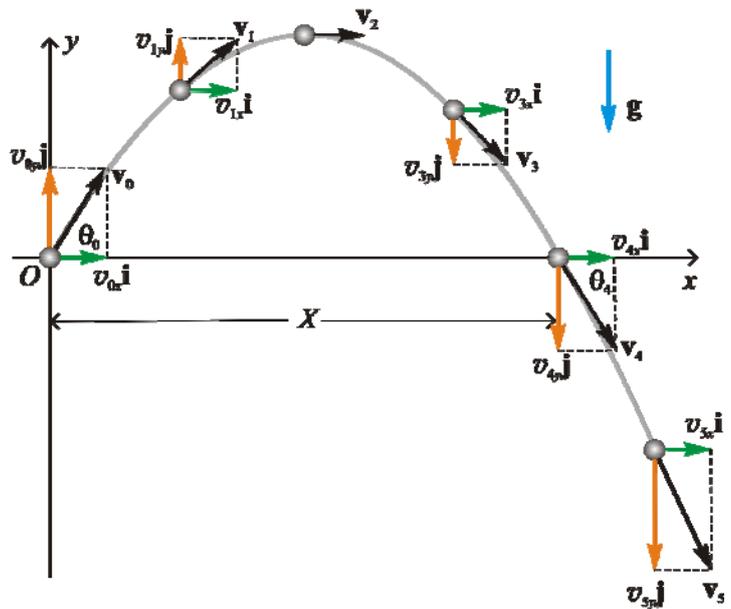


Fig. 15.5. La traiettoria di un proiettile, la velocità iniziale \mathbf{v}_0 e i suoi vettori componenti, nonché la velocità \mathbf{v} e i suoi componenti in cinque istanti successivi. Si noti che $v_x = v_{0x}$ per l'intero percorso. La distanza X è chiamata *gittata*.

$$\mathbf{a}(t) = -g \cdot \mathbf{j} \tag{15.9 (a)}$$

$$\mathbf{v}(t) = v_{0x} \cdot \mathbf{i} + v_{0y} \cdot \mathbf{j} \tag{15.9 (b)}$$

$$\mathbf{r}(t) = (v_{0x}t) \cdot \mathbf{i} + (v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2) \cdot \mathbf{j} \tag{15.9 (c)}$$

dove θ_0 è l'angolo formato dal vettore \mathbf{v}_0 al momento del lancio con il versore \mathbf{i} (Fig. 15.1). Naturalmente $v_0 \cdot \cos \theta_0$ e $v_0 \cdot \sin \theta_0$ sono, rispettivamente, le componenti v_{0x} e v_{0y} del vettore \mathbf{v}_0 riferite ai due assi x e y .

La proiezione del moto del proiettile lungo l'asse x e lungo l'asse y ci permette di scrivere le seguenti equazioni orarie:

$$a_x(t) = 0 \text{ m/s}^2 \tag{15.10 (a)}$$

$$v_x(t) = v_{0x} \tag{15.10 (b)}$$

$$x(t) = v_{0x}t \tag{15.10 (c)}$$

$$a_y(t) = -g \tag{15.11 (a)}$$

$$v_y(t) = v_{0y} - gt \tag{15.11 (b)}$$

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{15.11 (c)}$$

Che sono le equazioni di un *moto rettilineo uniforme*.

Che sono le equazioni di un *moto rettilineo uniformemente accelerato*.

Per trovare l'equazione della traiettoria occorre risolvere il sistema formato dalle equazioni [15.10 (c)] e [15.11 (c)]. Dalla [15.10 (c)] si ricava:

$$t = \frac{x}{v_{0x}} \quad [15.12]$$

e sostituendo nella [15.11 (c)] si ottiene:

$$y = v_{0y} \frac{x}{v_{0x}} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{0x}^2} \quad [15.13]$$

e quindi l'equazione della traiettoria del proiettile:

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{0x}^2} \quad [15.14]$$

o anche

$$y = (\tan \theta_0) \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \theta_0} \cdot x^2 \quad [15.15]$$

che non è altro che l'equazione di una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle y, avente la concavità rivolta verso il basso (il coefficiente di x^2 è senz'altro negativo) e passante per l'origine degli assi (manca il termine noto).

Per completare l'analisi del moto di un proiettile occorre considerare il cosiddetto *tempo di volo*, cioè il tempo impiegato dal proiettile a raggiungere l'altezza massima e ritornare alla quota di partenza. Ora, supponendo la Terra piatta (zona limitata della superficie terrestre), il proiettile impiegherà lo stesso tempo sia per la salita che per la discesa e quindi basterà calcolare il tempo impiegato a salire dalla quota di lancio alla massima altezza. A tale scopo cominciamo con il chiederci: "Quand'è che il proiettile raggiungerà la massima altezza?" La risposta è semplice: "Quando la componente y della velocità sarà nulla." Dalla [15.11 (b)] si ottiene così:

$$0 = v_{0y} - g\tilde{t} \quad [15.16]$$

e quindi:

$$\tilde{t} = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \cdot \sin \theta_0}{g} \quad [15.17]$$

Per cui l'espressione del *tempo di volo* sarà:

$$t_{\text{volo}} = 2\tilde{t} = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \cdot \sin \theta_0}{g} \quad [15.18]$$

Per determinare l'espressione della *altezza massima* basterà sostituire il valore della [15.17] nella [15.11 (c)]:

$$y_{\text{max}} = \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_{0y}^2}{g} \quad [15.19]$$

e finalmente l'espressione della *altezza massima* risulterà:

$$y_{\text{max}} = \frac{1}{2} \frac{v_{0y}^2}{g} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \theta_0}{2g} \quad [15.20]$$

Per determinare la massima quota raggiunta dal proiettile si può procedere anche utilizzando i metodi della geometria analitica determinando l'ordinata del vertice della parabola. Questo secondo metodo viene lasciato come esercizio di verifica.

Se sostituiamo il tempo di volo nella [15.10 (c)] si ottiene l'espressione della *gittata* del proiettile, definita come la distanza orizzontale X dall'origine (punto di lancio) al punto in cui il proiettile colpisce il suolo:

$$X = v_{0x} \cdot t_{\text{volo}} = v_{0x} \cdot \frac{2v_{0y}}{g} = 2 \frac{v_{0x} v_{0y}}{g} = 2 \frac{v_0^2}{g} \sin \theta_0 \cos \theta_0 \quad [15.21]$$

che si può anche scrivere, ponendo $2 \cdot \sin \theta_0 \cdot \cos \theta_0 = \sin 2\theta_0$, nella seguente forma:

$$X = 2 \frac{v_{x0} v_{y0}}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0 \quad [15.22]$$

Anche la gittata si può determinare con i metodi della geometria analitica e cioè andando a determinare gli zeri dell'equazione della parabola che rappresenta l'equazione della traiettoria del moto del proiettile. Si lascia come esercizio il controllo che questo metodo porta al risultato già trovato. Qual è il significato fisico della soluzione nulla che si trova risolvendo l'equazione di secondo grado in x ?

Problemi di fine capitolo

- 15.15.** Un disco viene lanciato sopra un tavolo privo di attrito e poi vola al di là del bordo del tavolo stesso. Disegna in diagrammi distinti:
- la forza che agisce sul disco mentre si sta muovendo sul tavolo e per alcuni punti della sua traiettoria quando il disco vola al di fuori del tavolo;
 - l'accelerazione negli stessi punti;
 - le componenti orizzontale e verticale della velocità nei medesimi punti;
 - la velocità vettoriale totale in ognuno dei punti.
- 15.16.** Un proiettile viene lanciato verso l'alto con una certa v_0 . Disegna in diagrammi distinti:
- la forza che agisce sul proiettile in vari punti della sua traiettoria (cioè, un punto mentre il corpo sale, il punto di massima altezza, un punto mentre il corpo scende);
 - l'accelerazione negli stessi punti;
 - le componenti orizzontale e verticale della velocità nei medesimi punti;
 - la velocità vettoriale totale in ognuno dei punti.
- 15.17.** Un proiettile viene lanciato verso l'alto con una certa v_0 con un certo angolo θ_0 rispetto all'orizzontale. Disegna in diagrammi distinti:
- la forza che agisce sul proiettile in vari punti della sua traiettoria (cioè, un punto mentre il corpo sale, il punto di massima altezza, un punto mentre il corpo scende);
 - l'accelerazione negli stessi punti;
 - le componenti orizzontale e verticale della velocità nei medesimi punti;
 - la velocità vettoriale totale in ognuno dei punti.
- 15.18.** Disegna la traiettoria che verrebbe seguita dal pesetto di un pendolo se il suo filo venisse tagliato:
- in corrispondenza di qualche punto dell'oscillazione verso il basso;
 - nel punto più basso dell'oscillazione;
 - in qualche punto nella parte verso l'alto dell'oscillazione;
 - e infine nell'istante finale dell'oscillazione.
- 15.19.** In quale punto o in quali punti della sua traiettoria il modulo della velocità di un proietto è minimo? In quale punto o in quali punti il modulo della velocità è massimo? (Si trascuri la resistenza dell'aria.)
- 15.20.** Un corpo viene lanciato orizzontalmente e cade di una distanza verticale pari a 78.24 m mentre percorre una distanza orizzontale di 30.0 m. Con quale velocità orizzontale è stato lanciato il corpo?
- 15.21.** Un sasso viene lanciato orizzontalmente verso l'esterno con una velocità iniziale di 20 m/s dalla sommità di una rupe; 4 s dopo, il sasso colpisce l'acqua sotto la rupe. Qual è l'altezza della rupe sopra l'acqua?
- 15.22.** Un astronauta in piedi sulla superficie della Luna lancia un sasso lunare in direzione orizzontale con una velocità di 15 m/s. A quale distanza dall'astronauta il sasso colpirà la superficie della Luna (supposta orizzontale) se l'astronauta ha lanciato il sasso da un'altezza di 1.6 m? (L'accelerazione di gravità sulla superficie della Luna è 1.62 m/s^2 .)
- 15.23.** Un cacciatore di scimmie (probabilmente un bracconiere) localizza una preda appesa a un ramo di un albero. Il cacciatore punta la canna del suo fucile direttamente verso la scimmia e spara. La scimmia vede il lampo prodotto dalla canna del fucile e, avvertendo che sta per essere colpita, abbandona istantaneamente la presa sul ramo. Si dimostri che il proiettile sparato dal cacciatore colpirà la scimmia indipendentemente dalla velocità del proiettile (supponendo naturalmente che il proiettile raggiunga la posizione in cui si trova la scimmia prima che quest'ultima atterri sul suolo).
- 15.24.** Calcolando tabelle complesse Galileo dimostrò che la gittata massima di un proietto sparato sopra il livello del suolo si ottiene in corrispondenza di un angolo di proiezione di 45° . Egli dimostrò

- anche che la gittata è la stessa per angoli di proiezione di $45^\circ + \theta$ e $45^\circ - \theta$, per qualunque valore di θ compreso fra 0° e 45°). Si dimostri che questa conclusione è corretta calcolando le gittate per alcuni valori di θ . Si disegnano le due possibili traiettorie per alcuni valori di θ .
- 15.25.** Una palla da baseball colpita bene con la mazza viaggia con una velocità di circa 50 m/s. Si calcoli la gittata massima di questa palla, trascurando la resistenza dell'aria. La resistenza dell'aria ha l'effetto di diminuire la gittata a circa il 70% del suo valore massimo. Si calcoli la gittata "pratica" in questo caso e si confronti il valore trovato con la distanza record di 172 m ottenuta nel 1953 da Mickey Mantle.
- 15.26.** Un proiettile viene sparato con un angolo di proiezione di 45° sopra l'orizzonte del pezzo. Si dimostri che la gittata del proiettile è uguale a 4 volte l'altezza massima che esso raggiunge.
- 15.27.** Un proiettile viene sparato con un angolo di proiezione di 34° e colpisce il suolo (supposto orizzontale) in un punto distante 1.7 km. Con quale velocità iniziale (velocità alla bocca) è stato sparato il proiettile?
- 15.28.** Con quale angolo di proiezione deve essere sparato un proiettile perché la gittata sia 650 m per una velocità iniziale (velocità alla bocca) di 220 m/s? (Gli angoli di proiezione che permettono di ottenere questa gittata sono due).
- 15.29.** Un corpo descrive una traiettoria circolare avente un raggio di 6.2 m ed è soggetto ad una accelerazione centripeta pari a tre volte quella di gravità (cioè $a_c = 3g$). Qual è la velocità del corpo? Qual è il periodo del moto?
- 15.30.** Un sasso viene lasciato cadere da una rupe la cui altezza rispetto alla base è h . Nello stesso istante una palla viene lanciata verticalmente verso l'alto dalla base della rupe con la velocità iniziale v_0 . Nell'ipotesi che la palla venga lanciata con velocità sufficiente, in quale istante t il sasso e la palla si incontreranno? (Si trascuri la resistenza dell'aria.)
- 15.31.** In base a misurazioni eseguite sulla cronofotografia della Fig. 15.1 e alle informazioni contenute nella didascalia, si determinino le velocità delle due palle da golf quando attraversano la più bassa delle linee orizzontali.
- 15.32.** Un corpo viene lanciato dal suolo con una velocità iniziale v_0 e con un angolo θ_0 rispetto al suolo. (Si trascuri la resistenza dell'aria).
- Qual è la velocità orizzontale iniziale del corpo? E la velocità verticale iniziale?
 - Qual è lo spostamento orizzontale del corpo nel tempo t ? E lo spostamento verticale nello stesso tempo?
 - Si scriva l'equazione della traiettoria del corpo.
 - Usando l'equazione trovata in (c) e sapendo che $v_0 = 4.5$ m/s e $\theta_0 = 45^\circ$, si determini la gittata del corpo.
- 15.33.**
- Costruire un grafico della velocità in funzione del tempo per una pallina lanciata verso l'alto dall'istante in cui la pallina è ancora in quiete nella mano fino all'istante in cui è momentaneamente in quiete sul suolo.
 - L'area della regione compresa tra la curva e l'asse dei tempi (sopra l'asse) è uguale all'area corrispondente sotto l'asse dei tempi?
 - Usando il grafico del punto (a), costruite il grafico dell'accelerazione in funzione del tempo per lo stesso moto.
-