# 24. PRINCIPI DI CONSERVAZIONE – QUANTITÀ DI MOTO

## 24.1. Introduzione

Le leggi della dinamica costituiscono uno degli strumenti più potenti per descrivere il comportamento dei sistemi di corpi soggetti a forze, da quelli più semplici a quelli più complessi.

Quando infatti si è nella situazione di poterle utilizzare appieno, esse *permettono non solo di prevedere il comportamento futuro del sistema*, ma anche di ricostruirne la storia dinamica passata (reversibilità).

Per poter sfruttare al massimo le capacità di previsione delle leggi della dinamica, è però necessario possedere alcune informazioni. Oltre alle masse, occorre infatti conoscere:

(*a*) in un determinato istante, posizione e velocità dei vari componenti del sistema (ciò che in fisica si chiama **stato iniziale**),

(*b*) istante per istante, le singole forze che agiscono sui componenti del sistema.

In questo caso è possibile ricavare l'accelerazione di ogni componente del sistema usando la seconda legge della dinamica e, sfruttando la conoscenza delle condizioni iniziali, dedurre come varieranno in ogni istante le velocità e le posizioni dei componenti del sistema.

Più sinteticamente, note le masse dei componenti del sistema, se si conoscono $\mathbf{r}(t_0)$, $\mathbf{v}(t_0)$ e $\mathbf{F}(t)$, si può dedurre $\mathbf{a}(t)$ e prevedere $\mathbf{v}(t)$ e $\mathbf{r}(t)$.

In alternativa, per poter utilizzare le leggi della dinamica, è necessario conoscere istante per istante le posizioni di ogni singolo componente del sistema.

In questo secondo caso, dalla conoscenza delle posizioni si possono dedurre in ogni istante le accelerazioni di ogni singolo componente usando semplicemente la definizione di accelerazione istantanea. È poi possibile, se sono note le masse, ricavare dalla seconda legge della dinamica come variano in ogni istante le forze che determinano il moto dei vari componenti del sistema. Quindi, se si conoscono, oltre alle masse: $\mathbf{r}(t)$, si può dedurre $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{a}(t)$ e, prevedere $\mathbf{F}(t)$.

Purtroppo è tutt'altro che semplice arrivare a possedere tutte le informazioni per sfruttare al massimo le capacità di previsione delle leggi della dinamica.

La determinazione dello stato iniziale di un sistema, per esempio, è problematica solo se il sistema è costituito da un numero troppo elevato di componenti: se è facile ad esempio determinare lo stato iniziale di un sistema costituito da due soli corpi, è praticamente impossibile farlo, se il sistema è costituito dalle particelle di fumo prodotte da una ciminiera.

Ancora più difficoltosa è la conoscenza dettagliata delle forze che agiscono sul sistema. Questa informazione è difficile da ottenere anche nel caso di sistemi costituiti da due soli corpi.

Per esempio, le forze che agiscono durante lo scontro tra una mazza da baseball e una palla, operano per un tempo così breve e cambiano così rapidamente che è di fatto impossibile effettuare delle misure.

Di conseguenza risulta impossibile stabilire una qualche relazione tra i valori che le forze assumono istante per istante, in modo da poter dedurre l'evoluzione cinematica del sistema (Fig. 24.1).

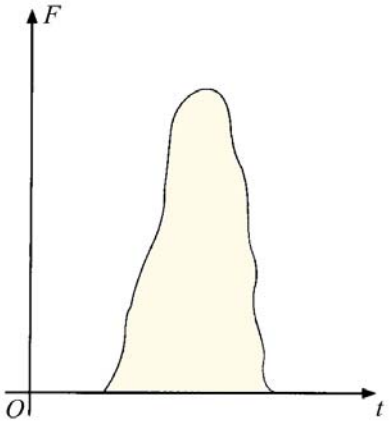


**Fig. 24.1.** In figura è indicato l'andamento qualitativo del modulo della forza interna che agisce durante un urto tra una mazza da baseball e una palla. L'intervallo temporale in cui le forze interne sono diverse da zero è molto piccolo e, tuttavia, esse variano molto rapidamente, fino a raggiungere valori massimi piuttosto alti.

I teoremi di conservazione di cui ci occuperemo costituiscono uno strumento alternativo alle leggi della dinamica, utilizzabile in tutti quei casi in cui non si è in grado di avere una conoscenza dettagliata delle forze in gioco.

Vedremo infatti che per poter utilizzare proficuamente i teoremi di conservazione è necessaria la conoscenza preliminare di un numero assai minore di informazioni.

La ricerca delle proprietà che si conservano, inoltre, ha una motivazione intuitiva profondamente radicata nel nostro modo di pensare che va ben al di là dell'esigenza di costruire strumenti da utilizzare in situazioni complicate. Spesso i nostri discorsi ricalcano, del tutto involontariamente, la struttura tipica di un teorema di conservazione.

## 24.2. Principio di conservazione della massa

Anche se la massa è stata introdotta e definita operativamente con la seconda legge della dinamica, occorre sottolineare da subito che il concetto di massa è molto più complesso e articolato di quanto potrebbe apparire.
"*… la massa può venir paragonata a un attore che appare sulla scena sotto varie spoglie, ma non mai nel suo vero aspetto. La massa è in effetti come Dio, una e trina. Essa può presentarsi come carica (massa) gravitazionale, come inerzia o come energia, ma non appare mai ai nostri sensi nella sua identità libera e spoglia.*»(*).

Gli equivoci attorno al concetto di massa sono di vecchia data e risalgono ai tentativi di rendere compatibili le nuove concezioni della massa che si andavano sviluppando dalle leggi della dinamica, con ben più antiche e radicate concezioni sulla *sostanza* di cui si riteneva che ogni corpo dovesse essere composto.

La proprietà dei corpi di resistere a modificazioni del loro stato di moto rettilineo uniforme o di quiete (solo una delle forme sotto cui si manifesta la massa), sembrava altrettanto generale di un'altra proprietà dei corpi: quella di essere necessariamente costituiti di materia.

Massa e materia finirono così con l'essere considerati sinonimi, e ancor più esatta sembrò l'identificazione quando Lavoisier, nel suo *Trattato Elementare di Chimica* del 1792, dimostrò che: "*Nulla si crea nel corso di reazioni naturali o artificiali, e si può considerare un assioma che in ogni reazione la quantità iniziale di materia è uguale alla quantità finale*".

Sarebbe tuttavia errato, alla luce delle concezioni attuali, considerare l'enunciato di Lavoisier come l'affermazione della conservazione della massa. Lavoisier identificava infatti la massa con la quantità di materia, e il suo enunciato va piuttosto inteso come un *principio di conservazione della materia* che in nessun modo può essere reso compatibile con il concetto di massa che si è andato definendo nella fisica moderna.

Infatti, mentre sino alla fine del Settecento, la maggior parte dei trattati di fisica identificavano la massa con la quantità di materia contenuta nei corpi, si venne progressivamente affermando, grazie ai contributi di Eulero, Hertz e Poincarè, una concezione della massa come coefficiente numerico, determinato dal rapporto tra forza e accelerazione. D'altra parte se, (come è stato fatto) si assume la forza come concetto precedente alla massa, occorre poi distinguere tra *massa inerziale e massa gravitazionale*, senza pretendere a priori la loro identità.

È chiaro a questo punto, come sia poco banale parlare di principio di conservazione della massa, quando la massa stessa è uno dei concetti più problematici che esistano.

Nella meccanica newtoniana, per esempio, si afferma che la massa dei corpi è costante ma, come si è già detto, ciò non è altro che una affermazione dell'indistruttibilità della materia, identificata illegittimamente con la massa.

Una corretta formulazione della conservazione della massa è in effetti possibile solo all'interno della relatività, che concepisce la massa come una tra le possibili forme di energia e ne riconduce la conservazione al più generale principio di conservazione dell'energia.

## 24.3. Impulso di una forza e quantità di moto

Le forze che si esercitano tra corpi mobili sono spesso di breve durata. Consideriamo, per esempio, un uomo e un ragazzo che si spingono l'un l'altro su una lastra levigata di ghiaccio; nell'istante in cui essi non sono più a contatto la forza si annulla. In situazioni come questa, interessante determinare non «come i corpi si siano mossi durante la spinta», bensì «quali siano state le variazioni dei loro moti prima e dopo l'urto». Per risolvere questo problema scriviamo la legge del moto di Newton in una forma diversa.

Dato che nel caso di una forza costante l'accelerazione istantanea è uguale all'accelerazione media, tale legge si può enunciare nel seguente modo:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} \qquad [24.1]$$

Moltiplicando entrambi i membri della relazione [24.1] per $\Delta t$, si ottiene:

$$\mathbf{F}\cdot\Delta t = m\cdot\Delta\mathbf{v} \qquad [24.2]$$

(*) H L. Jackson, *Presentation of the concept of mass* to *beginning physics students*, in American Journal of Physics. n. 3, 1959.

Nel primo membro della relazione [24.2] compare il prodotto della forza per l'intervallo di tempo durante il quale essa agisce ed è evidente che il prodotto rimane invariato se si raddoppia la forza e si dimezza l'intervallo di tempo. Se interessa soltanto il confronto tra il moto prima e dopo che la forza ha agito, ma non il moto durante l'intervallo di tempo $\Delta t$, è sufficiente considerare il prodotto $\mathbf{F} \cdot \Delta t$, chiamato *impulso* della forza.

Nel secondo membro della relazione [24.2] compare il prodotto della massa del corpo su cui agisce la forza per la variazione della sua velocità. Ponendo $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$, dove $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono, rispettivamente, la velocità all'inizio e alla fine dell'intervallo di tempo durante il quale la forza ha agito, si ottiene:

$$m \cdot \Delta\mathbf{v} = m \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 \qquad [24.3]$$

Il secondo membro della relazione [24.3] è la variazione (differenza tra il valore successivo e il valore precedente) del prodotto $m\mathbf{v}$, ossia $\Delta(m\mathbf{v})$. La relazione per l'impulso si può scrivere quindi nella forma:

$$\mathbf{F} \cdot \Delta t = \Delta(m\mathbf{v}) \qquad [24.4]$$

Si può dunque affermare che l'impulso della forza è uguale alla variazione del prodotto della massa per la velocità. Questo prodotto è detto *quantità di moto* e viene denotato con la lettera **p**:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \qquad [24.5]$$

Si ha quindi:

$$\mathbf{F} \cdot \Delta t = \Delta\mathbf{p} \qquad [24.6]$$

Sia l'impulso che la quantità di moto sono grandezze vettoriali poiché ciascuna di esse è il prodotto di una grandezza vettoriale per una grandezza scalare. Se si considera una componente dell'impulso per volta (per esempio la componente orizzontale), nel caso di una forza costante il prodotto $F_x \cdot \Delta t$ si ottiene calcolando l'area del rettangolo rappresentato nella Fig. 24.2. Inoltre quando varia il modulo della forza, ma non la sua direzione, la componente orizzontale dell'impulso è data dall'area sotto la curva della forza in funzione del tempo (Fig. 24.3).

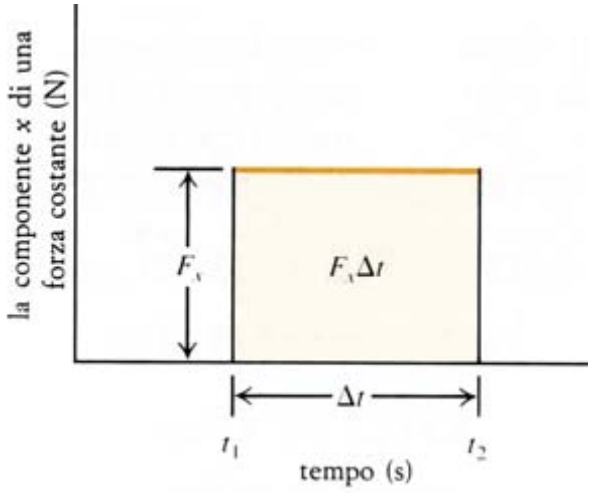


**Fig. 24.2.** La componente *x* di una forza costante è rappresentata in funzione del tempo nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$. L'area $F_x \cdot \Delta t$ sotto il grafico rappresenta la componente *x* dell'impulso nell'intervallo di tempo $\Delta t$.

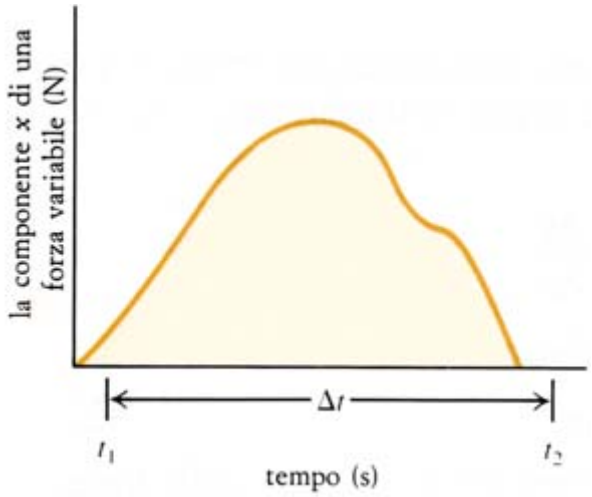


**Fig. 24.3.** Grafico della forza in funzione del tempo per una forza che varia con continuità. La componente *x* dell'impulso della forza fra $t_1$ e $t_2$ è rappresentata dall'area sotto la curva.

## *Quesiti*

**24.1.** Supponete di lanciare una palla contro un muro e di afferrarla di rimbalzo.
(*a*) Quanti impulsi sono stati applicati alla palla?
(*b*) Quale impulso è stato quello massimo?

**24.2.** Qual è il valore dell'impulso che imprime a un carrello di 8.00 kg una variazione di velocità di 4.0 m/s?

**24.3.** Quanto vale la forza media necessaria per arrestare in 0.05 s una mazza avente una quantità di moto di 25 N·s?

**24.4.** Un corpo di 3.0 kg è stato accelerato da una forza costante di 12 N da 10 m/s a 18 m/s.
(*a*) Qual è il valore dell'impulso impartito al corpo?
(*b*) Per quanto tempo ha agito la forza?

**24.5.** Un corpo con massa di 10 kg si muove di moto rettilineo alla velocità costante di 10 m/s. Poi una forza costante agisce sul corpo per 4.0 s, variandone la velocità da 10 m/s a –2 m/s.
(*a*) Calcolate l'impulso che agisce sul corpo.
(*b*) Determinate il modulo e il verso della forza.
(*c*) Determinate la quantità di moto del corpo prima e dopo l'azione della forza.

**24.6.** A un corpo mobile viene applicato un impulso con un angolo di 120° rispetto al vettore velocità. Qual è l'ampiezza dell'angolo tra il vettore impulso $\mathbf{F}\cdot\Delta t$ e il vettore variazione della quantità dì moto $\Delta\mathbf{p}$?

---

## 24.4. Quantità di moto e sue variazioni durante l'interazione fra due corpi

Servendoci di dischi a ghiaccio secco possiamo eseguire un esperimento analogo alla situazione dell'uomo e del ragazzo che si spingono sulla lastra di ghiaccio. Fissiamo l'estremità di una lamina metallica al bordo di un disco, flettiamo la lamina e leghiamo insieme le estremità con un filo (Fig. 24.4); collochiamo poi un secondo disco, più piccolo, vicino al primo. Con i due dischi fermi su una lastra piana di vetro, bruciamo il filo: la lamina scatta. Il moto successivo dei due dischi è visibile nella cronofotografia della Fig. 24.5.

**Fig. 24.4.** L'apparecchio usato per realizzare un tipo semplice dì «esplosione». Una lamina metallica piegata si trova fra due dischi a ghiaccio secco. La lamina è fissata al disco più grande ed è tenuta piegata da un filo.

In questo esperimento la massa del disco grande, compresa la lamina montata su di esso, è 3.9 kg e la massa del disco piccolo 2.0 kg. Un rapido sguardo alla fotografia indica che i due dischi si sono allontanati l'uno dall'altro in direzioni opposte. In ciascun intervallo di tempo tra due lampi consecutivi del flash il disco piccolo percorre una distanza maggiore di quella del disco grande. Quindi al disco piccolo è stata impressa una velocità più elevata che al disco grande. Eseguendo opportune misure sulla fotografia si può stabilire che il disco piccolo dopo la spinta si è mosso con una velocità di 0.48 m/s verso destra, mentre la velocità del disco grande è stata di 0.24 m/s verso sinistra. Scegliendo un versore **i** orientato da destra verso sinistra si ha che la quantità di moto del disco piccolo risulta:

$$\mathbf{p}_1 = m_1\mathbf{v}_1 = \left(2.0\text{kg}\times 0.48\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\mathbf{i} = 0.96\ \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}\ \mathbf{i} \qquad [24.7]$$

mentre la quantità di moto del disco grande è:

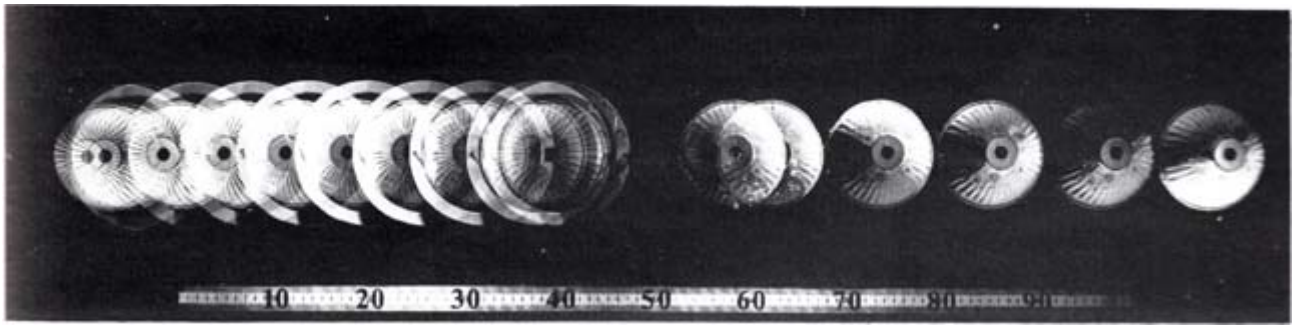


**Fig. 24.5.** Una cronofotografia del moto dei due dischi dopo che sono stati lanciati lontano l'uno dall'altro dalla lamina. Le fotografie sono state scattate ogni 4 s e la scala è graduata in centimetri. La cronofotografia è stata presa dall'alto.

$$\mathbf{p}_2 = m_2\mathbf{v}_2 = 3.9\text{kg} \times \left(-0.24\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\mathbf{i} = -0.94\,\text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}\ \mathbf{i} \qquad [24.8]$$

Entro la precisione sperimentale si trova che i valori delle quantità di moto dei due dischi sono uguali e opposti. Osservando i moti di due corpi che interagiscono tra loro partendo da fermi, troviamo che istante dopo istante le variazioni delle quantità di moto sono uguali e opposte.

Non importa che cosa produca le forze di interazione: esse possono derivare dai nostri muscoli, da una molla deformata o da un'esplosione chimica.

Finora abbiamo esaminato soltanto casi in cui i corpi interagenti erano inizialmente fermi. Quali variazioni si hanno nelle quantità di moto di due corpi interagenti quando uno dei due corpi o entrambi sono inizialmente in moto?

Nella Fig. 24.6 una palla da biliardo in moto urta contro una palla da biliardo ferma. La palla in moto si arresta e la palla urtata si allontana con la stessa velocità della palla urtante. Dato che le due palle hanno la stessa massa, la quantità di moto posseduta dopo l'urto dalla palla urtata è uguale a quella posseduta prima dell'urto dalla palla in moto. Questa palla perde tutta la sua quantità di moto e la palla urtata acquista esattamente la quantità di moto persa dalla palla urtante. Anche in questo caso le variazioni della quantità di moto sono uguali e opposte.

L'urto illustrato nella Fig. 24.6 è molto particolare: la palla da biliardo in moto urta frontalmente la palla ferma. Di solito tuttavia una palla da biliardo ne urta un'altra non frontalmente, ma di lato e dopo l'urto le due palle si allontanano in direzioni diverse. Tale urto è illustrato nella Fig. 24.7.

Nella cronofotografia la palla inizialmente in moto proviene dal basso. Dopo l'urto, come è presumibile, una palla si allontana verso destra e l'altra verso sinistra.

Le velocità e le direzioni delle palle prima e dopo l'urto si possono ricavare dalla cronofotografia. Con i valori delle velocità misurati in questo modo e in base alle direzioni del moto possiamo determinare i vettori velocità $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_1'$ e $\mathbf{v}_2'$ della prima palla prima e dopo dell'urto e della seconda palla dopo l'urto. Otteniamo le quantità di moto delle palle moltiplicando le velocità per le rispettive masse: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ per ciascuna palla. (Poiché le masse delle palle sono uguali, usare in questo caso $\mathbf{p}$ invece di $\mathbf{v}$ cambia semplicemente la scala delle figure.) Nella Fig. 24.8(*a*) sono disegnati i vettori quantità di moto $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_1'$ e $\mathbf{p}_2'$ che rappresentano la quantità di moto della palla urtante prima dell'urto e la quantità di moto di ciascuna palla dopo l'urto.

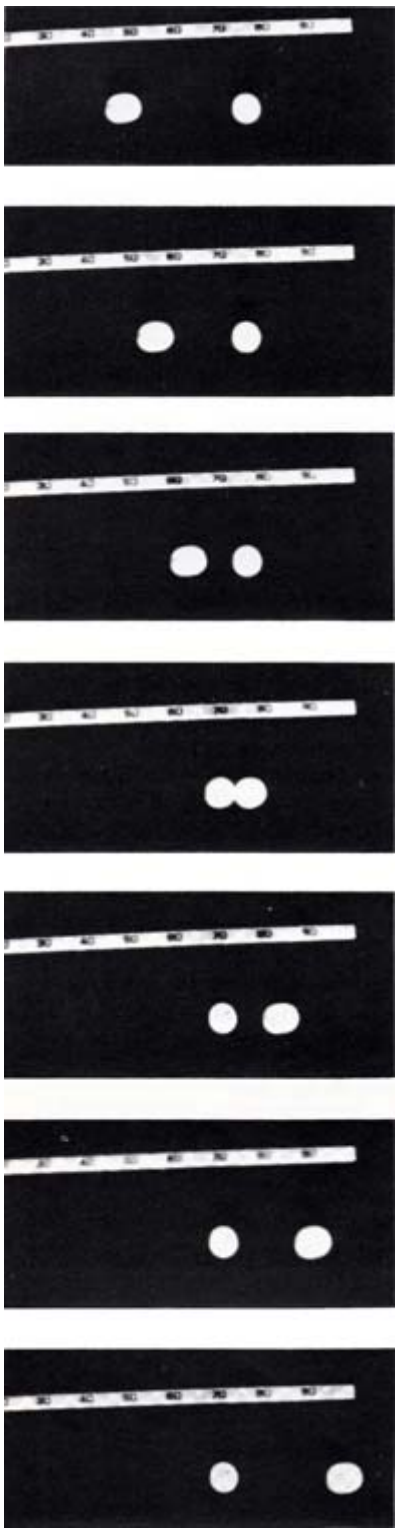

**Fig. 24.6.** Fotogrammi che mostrano un urto frontale fra due palle da biliardo dí massa uguale. I fotogrammi superiori mostrano la palla di sinistra mentre si muove verso la palla ferma. L'istante dell'urto è indicato nel quarto fotogramma. L'intervallo dí tempo tra due fotogrammi consecutivi è 1/48 di secondo; la scala è graduata in centimetri. È importante notare che tutta la quantità dí moto della palla urtante si trasferisce alla palla che era inizialmente ferma.

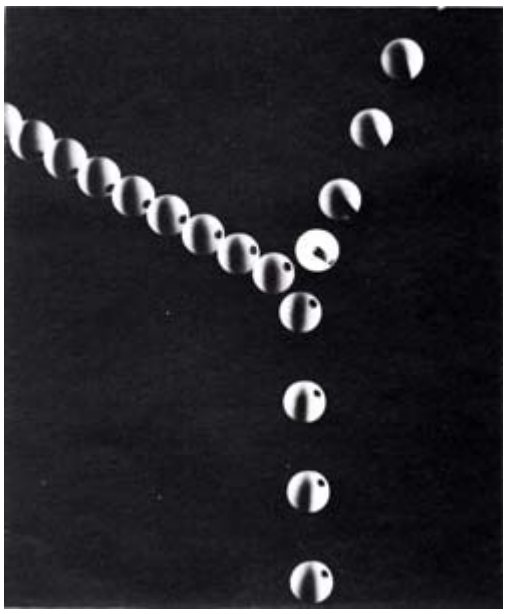

**Fig. 24.7.** Cronofotografia (frequenza delle istantanee 30/s) di un urto obliquo fra due palle, ciascuna dí massa 173 g. La palla contrassegnata con un punto proviene dal basso della fotografia e urta la palla ferma, contrassegnata con una striscia. Per ottenere le velocità e quindi le quantità di moto rappresentate graficamente nella Fig. 24.8, si è tenuto conto del fatto che le dimensioni della fotografia sono circa il 10% delle dimensioni reali.

In questo esperimento le quantità di moto delle due palle variano di quantità uguali, ma in verso opposto (Fig. 24.8(*b*)):

$$\Delta\mathbf{p}_2 = -\Delta\mathbf{p}_1. \qquad [24.9]$$

Nella Fig. 24.8(*c*) si può osservare che la somma delle quantità di moto delle due palle dopo l'urto ($\mathbf{p}_1'+\mathbf{p}_2'$) è uguale alla quantità di moto dell'unica palla in movimento prima dell'urto $\mathbf{p}_1$.

L'esempio di Fig. 24.7 si può considerare un caso generale di urto bidimensionale tra due corpi sferici, poiché si può sempre scegliere un sistema di coordinate in cui il corpo urtato è fermo prima dell'urto.

La distanza tra la traiettoria iniziale del corpo urtante e una retta parallela a essa e passante per il centro di massa del corpo urtato è detta *parametro d'urto* ed è denotata generalmente con il simbolo *b*.

Se $b = 0$, l'urto è centrale (la perpendicolare, o normale, comune alla superficie dei corpi sferici nel punto di contatto, detta *linea d'urto*, contiene i centri di massa dei corpi stessi) e diretto (nel tempuscolo in cui avviene l'urto, detto istante eccezionale, le velocità dei centri di massa sono dirette secondo la linea d'urto): il moto dei due corpi si svolge sempre lungo la stessa retta. Un esempio di questo di tipo di urto è l'urto frontale unidimensionale illustrato nella Fig. 24.6.

Se *b* è maggiore della somma dei raggi dei due corpi, non si ha urto.

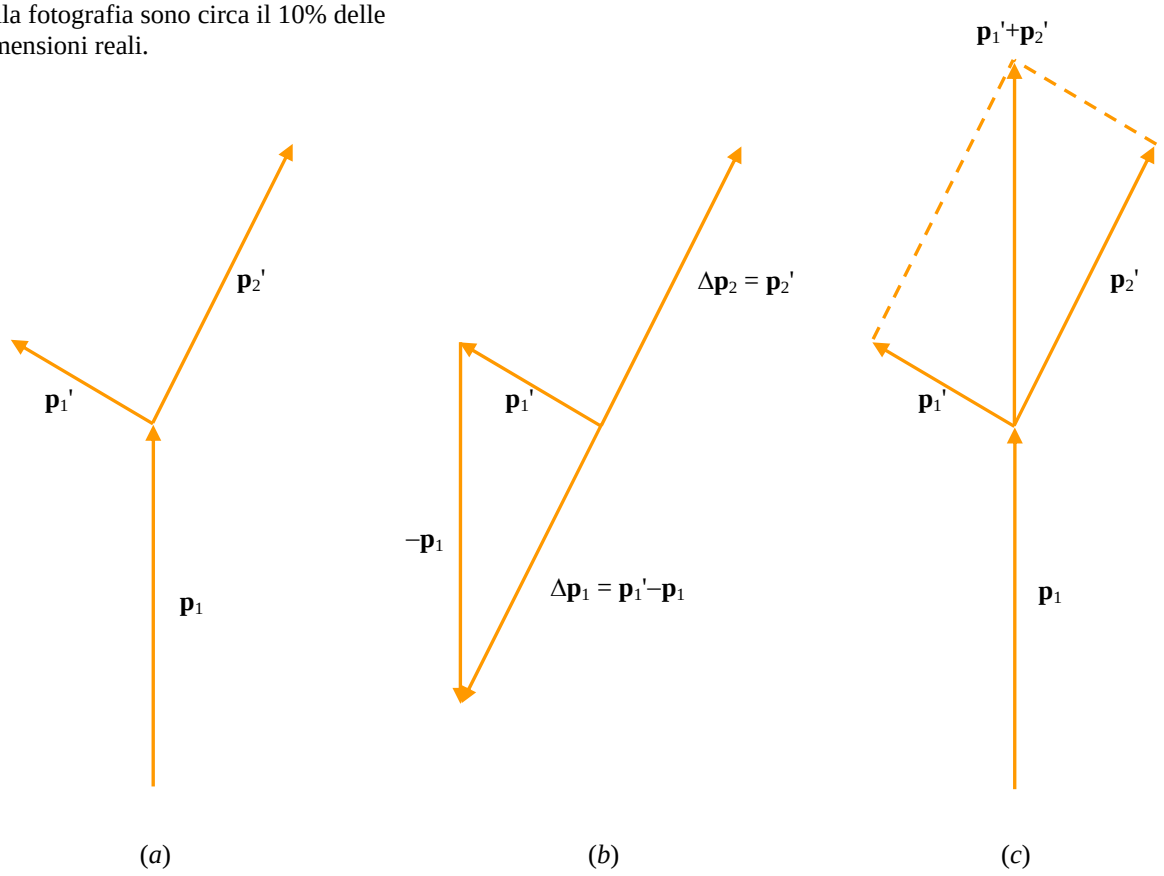


**Fig. 24.8.** (*a*) I vettori che rappresentano le quantità di moto delle palle della Fig. 24.7: il vettore $\mathbf{p}_1$ è la quantità di moto iniziale della palla contrassegnata con un punto, il vettore $\mathbf{p}_1'$ è la sua quantità di moto dopo l'urto mentre il vettore $\mathbf{p}_2'$ è la quantità di moto acquistata dalla palla inizialmente ferma. In (*b*) viene ricavato graficamente che $\Delta\mathbf{p}_2 = -\Delta\mathbf{p}_1$ mentre in (*c*) è ricavato il vettore $\mathbf{p}_1'+\mathbf{p}_2'$ che risulta uguale a $\mathbf{p}_1$.

Se *b* è minore della somma dei raggi dei due corpi, l'urto è centrale e obliquo (nell'istante eccezionale le velocità dei centri di massa dei due corpi non sono dirette secondo la linea d'urto): l'urto si svolge in un piano. Un esempio di questo di tipo di urto è l'urto non-frontale bidimensionale raffigurato in Fig. 24.7.

### *Quesiti*

---

**24.7.** Come potete stabilire dall'osservazione della Fig. 24.6 che tutta la quantità di moto della palla urtante si è trasferita alla palla urtata?

**24.8.** Nella Fig. 24.8 perché $\Delta\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_2'$?

**24.9.** Supponete che l'uomo e il ragazzo su pattini da ghiaccio, descritti all'inizio del paragrafo 24.3, abbiamo masse di 90 kg e 45 kg rispettivamente. Dopo che si sono spinti l'un l'altro, l'uomo si muove verso nord con una velocità di 2 m/s. Determinate la velocità del ragazzo.

**24.10.** Un astronauta sta usando un cacciavite per inserire una vite nella superficie esterna di un veicolo spaziale. Perché deve afferrare il veicolo con una mano mentre esegue questa operazione?

---

## 24.5. Legge di conservazione della quantità di moto

Nel paragrafo precedente abbiamo considerato alcuni esempi di interazioni fra due corpi. Il moto di ciascun corpo varia e la variazione della quantità di moto di un corpo è uguale e opposta alla variazione della quantità di moto dell'altro. Proseguendo nella trattazione troveremo molti altri esempi.

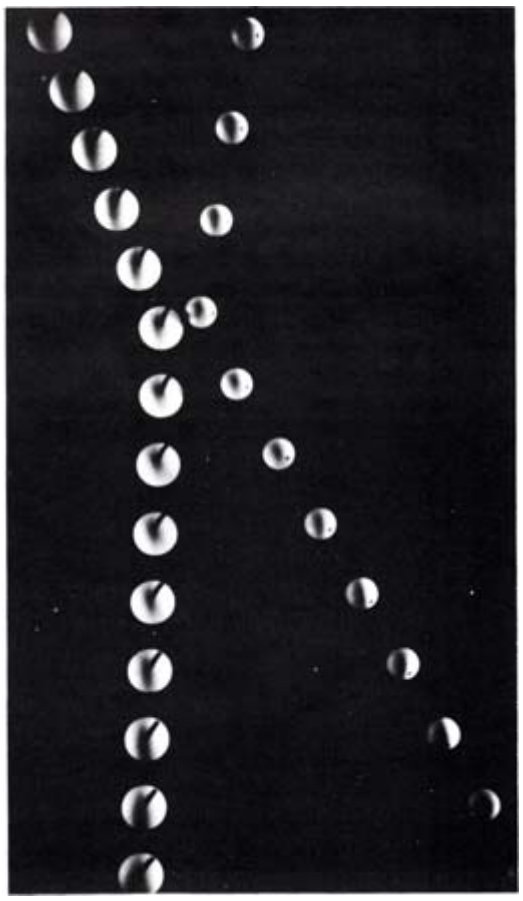

**Fig. 24.9.** Cronofotografia di un urto fra due palle, una di massa 201.1 g e l'altra di massa 85.4 g. Anche in questo caso la frequenza delle istantanee era di 30 al secondo e il dispositivo sperimentale era uguale a quello descritto nella Fig. 24.7. Entrambe le palle sono inizialmente in moto e provengono dall'alto della fotografia.

Nessun singolo esempio può offrire una dimostrazione generale del fatto che le variazioni delle quantità di moto di due corpi interagenti sono sempre uguali e opposte, ma le nostre osservazioni sulle interazioni di due corpi, nelle più diverse condizioni, indicano che le variazioni uguali e opposte delle quantità di moto sono una immutabile legge di natura.

Questa legge di natura può essere enunciata in una forma diversa. Introduciamo la quantità di moto totale di due corpi:

$$\mathbf{p}_{tot} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \qquad [24.10]$$

Poiché le eventuali variazioni delle quantità di moto $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ sono uguali e opposte, $\Delta\mathbf{p}$ è uguale a zero e la quantità di moto totale $\mathbf{p}_{tot}$ non cambia mai, ma rimane costante. L'enunciato che la quantità di moto è costante costituisce la *legge della conservazione della quantità di moto.*

Consideriamo la conservazione della quantità di moto nella situazione in cui due palle di masse diverse, inizialmente in moto, si urtano. Tale urto è illustrato nella Fig. 24.9.

Misurando i percorsi delle due palle tra due lampi di luce consecutivi, è possibile determinare le loro velocità; i vettori velocità sono disegnati nella Fig. 24.10(*a*). Se si moltiplicano i vettori velocità per i valori delle corrispondenti masse, 85.4 g e 201.1 g, si ottengono i vettori quantità di moto per le singole palle prima e dopo l'urto (Fig. 24.10(*b*)). Sulla sinistra della Fig. 24.10(*c*) sono stati sommati i vettori quantità di moto di entrambe le palle prima dell'urto in modo da ottenere la quantità di moto totale, mentre a destra si sono sommati i vettori quantità di moto dopo l'urto. Possiamo osservare che i due valori misurati della quantità di moto totale sono quasi esattamente gli stessi. Il risultato di questo esperimento è in accordo con il principio della conservazione della quantità di moto.

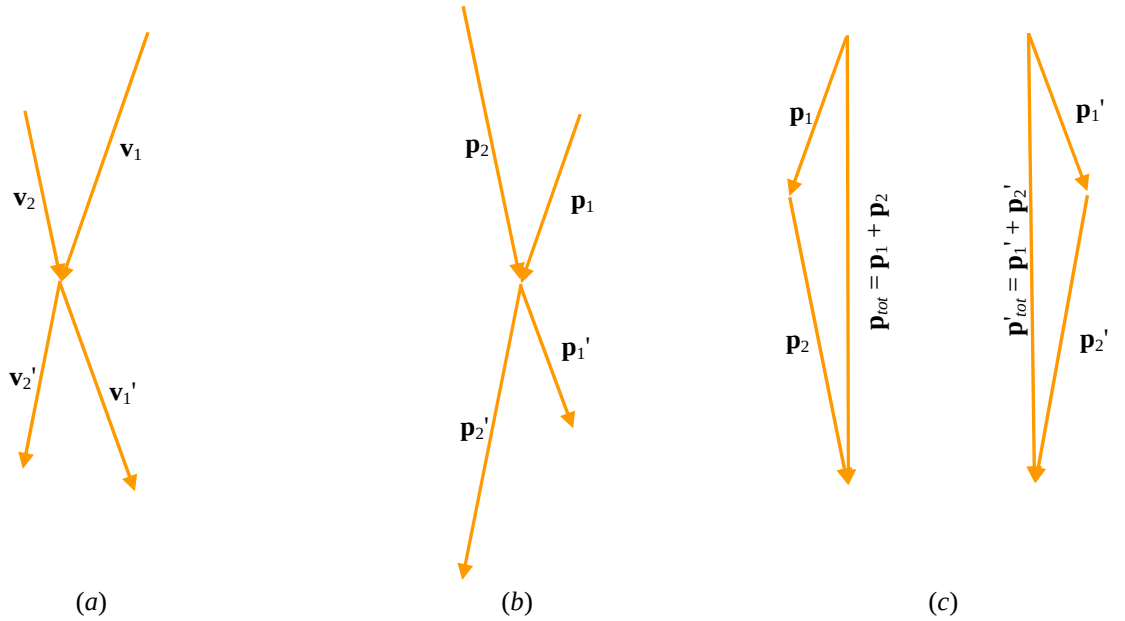


**Fig. 24.10.** (*a*) I vettori velocità delle palle della Fig. 10.9. Il pedice «1» si riferisce alla palla più piccola mentre il pedice «2» a quella più grande. Velocità e quantità di moto dopo l'urto sono indicate da simboli con l'apice «'». (*b*) I vettori quantità di moto prima dell'urto e dopo l'urto. (*c*) A sinistra la somma delle quantità di moto prima dell'urto e a destra la somma delle quantità di moto dopo l'urto. Come si può vedere, $\mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ infatti, quando è stato eseguito il disegno originale, la somma delle quantità di moto prima e dopo l'urto sono risultate uguali a meno di circa 1 parte su 200.

Esaminiamo un altro tipo di urto, quello in cui le due masse dopo l'urto rimangono unite e continuano a muoversi come un unico corpo (come vedremo più avanti, si tratta di un *urto completamente anelastico*).

La Fig. 24.11 mostra un urto tra una palla da golf e una palla di stucco. Nella Tab. 24.1 sono riportate le masse delle palle e le velocità della palla da golf e delle due palle attaccate prima e dopo l'urto. In base a questi valori sono state calcolate le quantità di moto iniziali e finali del sistema. Si può verificare che la quantità di moto finale è uguale alla quantità di moto iniziale a meno del 3 %, valore che dipende dalla precisione delle misure.

Un grandissimo numero di esperimenti ha prodotto risultati analoghi: la quantità di moto finale di qualsiasi sistema isolato è sempre uguale alla quantità di moto iniziale dello stesso sistema dopo che è avvenuto l'urto. Il principio della conservazione della quantità di moto è uno dei fondamenti della fisica.

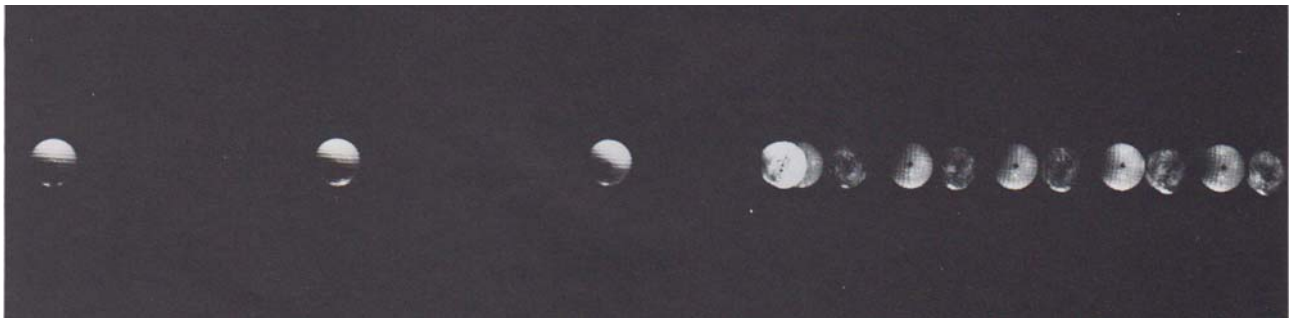

**Fig. 24.11.** Cronofotografia di un urto tra una palla golf e una palla di stucco. La palla da golf proviene da sinistra e urta la palla di stucco. Le due palle si allontanano verso destra, attaccate l'una all'altra. Misurate il rapporto tra la velocità iniziale e la velocità finale e verificatelo confrontandolo con il valore calcolato indicato nella Tab. 24.1.

**Tabella 24.1.**

| | Massa (g) | Velocità (cm/lampo) | Quantità di moto iniziale (g·cm/lampo) | Quantità di moto finale (g·cm/lampo) |
|---|---|---|---|---|
| Palla da golf | 45.7 | 3.75 | 171 | |
| palla di stucco | 69.7 | 0 | 0 | |
| Entrambe | 115.4 | 1.45 | | 167 |

## *Quesiti*

**24.11.** Nella Fig. 24.10, in che modo è stato costruito il diagramma (*b*) partendo dal diagramma (*a*)?

**24.12.** Due dischi a ghiaccio secco, inizialmente fermi, sono stati allontanati l'uno dall'altro da un'esplosione alle velocità di 5 cm/s e 2 cm/s in versi opposti. Qual è il rapporto tra le loro masse?

**24.13.** Un carro frigorifero fermo, di massa $2.0\times10^4$ kg, viene urtato da un carro merci che ha una massa $3.0\times10^4$ kg. Prima dell'urto il carro merci viaggiava a 1.0 m/s. Se i carri ferroviari rimangono agganciati, qual è la nuova velocità?

## 24.6. Sistema fisico

Molto spesso in fisica occorre considerare due o più corpi svincolati dal resto dell'universo e per questo viene introdotto il termine **sistema di corpi**. La scelta dei componenti di un sistema è dettata solo da ragioni di convenienza (Fig. 24.12).

Per un sistema di più corpi è opportuno introdurre la grandezza $\mathbf{p}_{tot}$ , quantità di moto del sistema, come somma delle q.d.m. dei singoli corpi:

$$\mathbf{p}_{tot} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + ... + \mathbf{p}_i + ... \qquad [24.11]$$

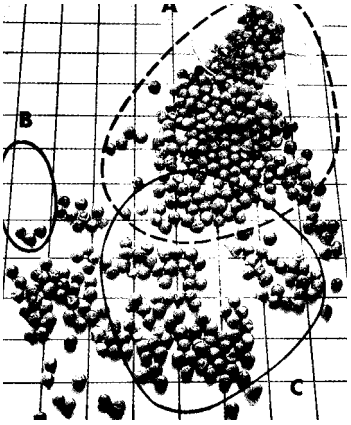


**Fig. 24.12.** Si può scegliere come sistema quello formato dai piselli racchiusi entro la linea *A*, oppure quello formato dai piselli racchiusi entro la linea *B*, oppure ancora quello formato di piselli entro la linea *C*, ...

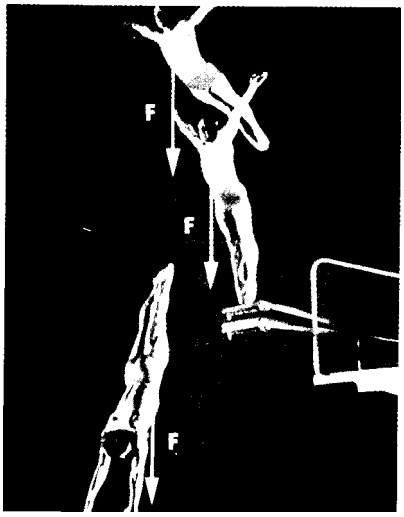


**Fig. 24.13.** Se si considera il sistema composto dal tuffatore e dalla Terra, la forza di gravità risulta interna, perché la Terra che la esercita è ora parte del sistema. La risultante delle forze interne al sistema è nulla, dato che, in base alla terza legge della dinamica, la forza esercitato dalla Terra sul tuffatore è opposta a quella esercitata dal tuffatore sulla Terra. La risultante delle forze esterne è tutt'altro che nulla: la Terra e il tuffatore risentono infatti dell'attrazione gravitazionale degli altri corpi dell'Universo.

## 24.7. Sistema isolato

La conservazione della quantità di moto è valida non solo per i sistemi precedentemente analizzati (paragrafi 24.4 e 24.5) ma anche in altri casi.

Al riguardo, per poter generalizzare la conservazione della quantità di moto, dobbiamo precisare il significato di **sistema isolato**.

Un sistema di due o più corpi si dice *isolato* quando risulta trascurabile ogni forma d'interazione con corpi materiali che non fanno parte del sistema. In altri termini, se ci riferiamo alle forze agenti su un corpo di un sistema, possiamo dividere queste in due categorie, quella delle **forze interne** e l'altra delle **forze esterne**.

La forza agente su un corpo del sistema e dovuta all'azione di un altro corpo dello stesso sistema viene detta *interna*, mentre quella agente su un corpo del sistema e dovuta all'azione di altri corpi che non fanno parte del sistema viene detta *esterna* (Fig. 24.13).

*Un sistema è isolato se non agiscono sui suoi corpi forze esterne, oppure se la risultante delle forze esterne è nulla o più in generale se le forze esterne sono trascurabili rispetto a quelle interne.*

Nel sistema formato dalla Terra e dalla Luna i due corpi interagiscono uno sull'altro con forze gravitazionali opposte; il sistema però non è isolato, perché entrambi i corpi sono soggetti all'azione del Sole e degli altri pianeti. Tutto il sistema solare può invece essere considerato con buona approssimazione un sistema isolato.

Un sistema può essere considerato isolato anche quando le forze esterne sono trascurabili rispetto a quelle interne, il che avviene in particolari problemi. Per esempio una bomba non è certamente isolata, essendo soggetta all'attrazione della Terra, ma può considerarsi un sistema isolato nel momento dello scoppio, perché allora si sviluppano forze interne assai più intense del peso della bomba stessa. La stessa cosa avviene per gli urti fra due o più corpi.

## 24.8. Principio di conservazione della quantità di moto (si veda anche il paragrafo 24.5)

Ciò premesso, i milioni di esperimenti al giorno che si fanno in tutti i laboratori del mondo e l'esperienza quotidiana evidenziano che tutti i fenomeni avvengono in modo da rispettare il seguente principio di conservazione:

*in un sistema isolato la quantità di moto totale rimane costante nel tempo, se misurata rispetto ad un sistema inerziale.* ($\mathbf{p}_{tot} = \mathbf{cost}$)

La validità del principio di conservazione della quantità di moto all'interno di un sistema isolato non implica affatto che la quantità di moto del singoli componenti del sistema non possa variare. Se così fosse, all'interno di un sistema isolato non potrebbe avvenire alcun tipo di trasformazione e la portata conoscitiva del principio di conservazione della quantità di moto sarebbe irrilevante, poiché si limiterebbe ad affermare che quando in un sistema nulla cambia, anche la quantità di moto resta costante.

Ciò che invece si può dedurre dal principio di conservazione della quantità di moto è ben più generale ed interessante:

*tutte le trasformazioni che avvengono all'interno di un sistema isolato possono modificare lo stato dinamico di ognuno dei singoli componenti, ma in modo tale che la quantità di moto complessiva del sistema resti invariata* ($\Delta\mathbf{p}_1 + \Delta\mathbf{p}_2 + ... + \Delta\mathbf{p}_n = \mathbf{0}$).

Negli esperimenti sugli urti descritti finora la quantità di moto totale si manteneva costante in quanto i sistemi considerati erano isolati. Tutti i corpi che interagivano erano soggetti a due forze esterne, il proprio peso $m\mathbf{g}$ e la reazione del piano di appoggio, le quali si fanno equilibrio avendo supposto il piano orizzontale, e soltanto a forze interne.

## 24.9. Indipendenza del principio di conservazione della quantità di moto dal sistema inerziale

L'enunciato del principio comporta la conservazione della quantità di moto misurata rispetto ad un sistema di riferimento inerziale *S*. Tuttavia, se misuriamo la quantità di moto totale del sistema rispetto ad un altro sistema di riferimento inerziale *S**, in moto rispetto ad *S* con velocità costante **w** si osserva che il valore della quantità di moto totale $\mathbf{p}^*_{tot}$ assume un valore diverso. Tuttavia è facile dimostrare, tramite l'equazione $\mathbf{v} = \mathbf{v}^* + \mathbf{w}$, che avremo ancora $\mathbf{p}^{*\prime}_{tot} = \mathbf{p}^*_{tot}$. Questo fatto si esprime dicendo che *il principio di conservazione della quantità di moto di un sistema isolato è covariante rispetto ad una trasformazione galileiana.*

Il termine *covariante* per trasformazioni galileiane viene usato quando una legge fisica, cioè una relazione matematica tra alcune grandezze, *assume la stessa forma in due sistemi S e S* inerziali*, pur assumendo le grandezze che vi intervengono valori diversi nei due sistemi di riferimento.

## 24.10. Conservazione della quantità di moto e terza legge di Newton

Abbiamo verificato che in tutte le interazioni tra due corpi la quantità di moto si conserva; la quantità di moto perduta da un corpo viene acquistata dall'altro. Cioè,

$$\Delta\mathbf{p}_1 = -\Delta\mathbf{p}_2 \qquad [24.12]$$

Se si indica con $\mathbf{F}_{1\to 2}$ la forza che la massa $m_1$ esercita sulla massa $m_2$ e con $\mathbf{F}_{2\to 1}$ la forza che $m_2$ esercita su $m_1$, si ha:

$$\Delta\mathbf{p}_1 = \mathbf{F}_{2\to 1}\cdot\Delta t \qquad [24.13]$$

e

$$\Delta\mathbf{p}_2 = \mathbf{F}_{1\to 2}\cdot\Delta t\,. \qquad [24.14]$$

L'intervallo di tempo $\Delta t$ deve essere lo stesso per entrambi i corpi che intervengono nell'urto. Se io spingo voi, voi spingete automaticamente me nel verso opposto e io non posso spingere voi più a lungo di quanto voi possiate spingere me. Sostituendo la [24.13] e la [24.14] nella [24.12] si ottiene:

$$\mathbf{F}_{2\to 1}\cdot\Delta t = -\mathbf{F}_{1\to 2}\cdot\Delta t \qquad [24.15]$$

da cui si ricava infine che:

$$\mathbf{F}_{2\to 1} = -\mathbf{F}_{1\to 2} \qquad [24.16]$$

L'idea che le forze di interazione devono essere uguali e opposte fu enunciato da Newton (dopo i suoi esperimenti sulla conservazione della quantità di moto): «A ogni azione si oppone sempre una reazione uguale, ossia le reazioni mutue che due corpi esercitano l'uno sull'altro sono sempre uguali e di verso opposto». Questo enunciato è noto come terza legge del moto di Newton, sebbene riguardi le forze e non il moto. Questa legge è anche conosciuta come *principio di azione e reazione*. Abbiamo ammesso la validità della terza legge di Newton anche per la forza gravitazionale (paragrafo 21.9 a pag.242) e per la forza coulombiana (paragrafo 22.10 a pag.250) per ragioni di simmetria. In generale le forze che ubbidiscono alla terza legge di Newton sono dette *forze newtoniane*. Tutte le forze che dipendono soltanto dalla distanza tra i corpi interagenti e che sono dirette lungo la retta congiungente i loro centri sono forze newtoniane. In un capitolo successivo esamineremo una forza non newtoniana.

Applichiamo ora la terza legge di Newton a più corpi in moto e interagenti, soggetti soltanto a forze newtoniane. Poiché tutte le forze agiscono a coppie, con $\mathbf{F}_{2\to 1} = -\mathbf{F}_{1\to 2}$, anche i loro effetti sulle quantità di moto dei corpi sono a due a due uguali e opposti. Perciò, mentre un corpo acquista una certa quantità di moto, un altro perde una quantità di moto uguale e opposta e quindi nell'intero sistema isolato la quantità di moto totale non subisce variazioni.

Dalla validità della terza legge di Newton, deriva dunque la conservazione della quantità di moto. Ma gli esperimenti indicano che la quantità di moto si conserva nel caso di molti corpi, anche se le forze interagenti non sono newtoniane e si può quindi dedurre che il principio della conservazione della quantità di moto è molto più generale della terza legge di Newton.

### *Quesiti*

---

**24.14.** In un insieme di 3 corpi, qual è il significato di:

(*a*) $\mathbf{F}_{3\to 1}$ ?

(*b*) $\mathbf{F}_{1\to 3}$ ?

(*c*) $\mathbf{F}_{3\to 2}$ ?

---

## Problemi di fine capitolo

**24.15.** Una palla da 150 g sta viaggiando alla velocità di 40 m/s quando viene colpita da una mazza che le fa invertire la direzione imprimendole la velocità di 60 m/s. Qual è la forza media esercitata dalla mazza se è rimasta in contatto con la palla per 5.0 ms? [3000N]

**24.16.** Una palla da 1.0 kg cade verticalmente e colpisce il suolo a una velocità di 25 m/s. Essa rimbalza con una velocità iniziale di 10 m/s: (*a*) che valore ha l'impulso che agisce sulla palla durante il contatto? (*b*) se la palla resta in contatto con il suolo per 0.020 s, quale forza media esercita sul suolo?

**24.17.** Una palla da 300 g alla velocità di 6.0 m/s colpisce una parete ad un angolo $\theta$ con la parete di 30° e rimbalza alla stessa velocità ed allo stesso angolo. Rimane in contatto con la parete per 10 ms. (*a*) quale è stato l'impulso ricevuto dalla palla? (*b*) quale è stata la forza media **F** esercitata dalla palla sulla parete? [(*a*)1.8 N·s, verso sinistra; (*b*)180 N verso destra]

**24.18.** Una particella di 5.0 kg con una velocità di 3.0 m/s urta una particella di 10 kg che ha una velocità di 2.0 m/s nella stessa direzione e verso. Dopo l'urto si osserva che la particella di 10 kg viaggia nella direzione originaria con una velocità di 4.0 m/s. Quale è la velocità della particella di 5.0 kg immediatamente dopo l'urto? [–1.0 m/s]

**24.19.** Due pattinatori si scontrano e si abbracciano restando uniti. Uno, di massa $m_1$=70 kg, si sta muovendo inizialmente verso est con velocità $v_1$=6.0 km/h. L'altro, di massa $m_2$=50 kg, si muove inizialmente verso nord con velocità $v_2$=8.0 km/h. Qual è la velocità finale della coppia? [4.9 km/h]

**24.20.** Due automobili viaggiano una verso ovest e una verso sud e si dirigono allo stesso incrocio. *A*, di massa totale 450 kg, ha una velocità di 70 km/h; *B*, di massa totale 600 kg, ha una velocità di 90 km/h. All'incrocio si scontrano e rimangono incastrate l'una con l'altra. Trovare il modulo e la direzione della velocità dell'insieme dei due veicoli immediatamente dopo lo scontro.

**24.21.** Un nucleo in quiete si disintegra in tre particelle; due di esse (Fig. A) hanno le masse e le velocità indicate:

$m_1 = 17\times10^{-27}$kg ; $v_1$= $6.0\times10^{6}$m/s,

$m_2 = 8.0\times10^{-27}$kg, $v_2 = 8.0\times10^{6}$m/s.

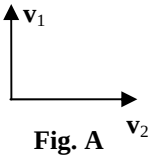

**Fig. A**

Qual è la quantità di moto della terza particella, se si sa che la sua massa è pari a $12\times10^{-27}$ kg?

**24.22.** Un corpo di 20 kg, che si muove nella direzione dell'asse *x* positivo alla velocità di 200 m/s, a causa di una esplosione interna si spezza in tre parti. Una parte, di massa 10 kg, si muove dopo l'esplosione nella direzione dell'asse *y* positivo alla velocità di 100 m/s. Un secondo frammento, di massa 4 kg, si muove nella direzione dell'asse *x* negativo alla velocità di 500 m/s. Qual è la velocità del terzo frammento sapendo che la sua massa è di 6.0 kg?

**24.23.** Una persona si trova sopra un carrello in movimento con $v$ = 3m/s. La massa dell'intero sistema è 100 kg. La persona vuole arrestare il carrello sparando, nella stessa direzione di moto, dei proiettili di massa 200 g e velocità 180 km/h. Si chiede quanti proiettili deve sparare. [30]

**24.24.** Il deutone è una particella nucleare costituita da un protone e da un neutrone. La sua massa è di circa $3.4\times10^{-24}$ g. Un deutone accelerato in un ciclotrone fino alla velocità di $1.0\times10^{9}$ cm/s urta un altro deutone fermo.

(*a*) Se le due particelle formano un nucleo di elio, trovare la velocità del nucleo.

(*b*) Il nucleo di elio si spezza poi in un neutrone con massa di circa $1.7\times10^{-24}$ g e in un isotopo dell'elio di massa $5.1\times10^{-24}$ g. Se il neutrone si allontana ad angolo retto dalla direzione originaria con velocità $5.0\times10^{8}$ cm/s, calcolare la velocità dell'isotopo dell'elio in modulo, direzione e verso.

**24.25.** Un carrello di 10 kg si muove su una superficie orizzontale con una velocità costante di 10 m/s. Una pallottola di plastilina è lasciata cadere (?) nel carrello da un'altezza di 4 m e si attacca al pianale. Si descriva il moto successivo.

**24.26.** Un vagone ferroviario scoperto, del peso di una tonnellata, sta viaggiando in piano su binari aventi attrito trascurabile alla velocità di 60 km/h. Inizia a piovere e il vagone raccoglie acqua al ritmo di 1 tonnellata all'ora. Se la pioggia cade verticalmente, dopo quanto tempo la velocità del vagone si ridurrà a 30 km/h?

**24.27.** Un protone (massa atomica 1.0 u) con una velocità di 500 m/s urta elasticamente un altro protone fermo. Il protone incidente viene diffuso ad un angolo di 60° dalla sua direzione iniziale: (*a*) quali saranno le velocità dei due protoni dopo l'urto? (*b*) quale sarà la direzione della velocità dopo l'urto del protone urtato? [250m/s; 433m/s; 30°]