

25. LAVORO E ENERGIA CINETICA

APPENDICE 1

PRODOTTO SCALARE DI DUE VETTORI

Quando si moltiplica un vettore per un altro vettore, bisogna distinguere tra prodotto scalare (indicato con \times) e prodotto vettoriale (indicato con \wedge).

Il prodotto scalare di due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} si indica con $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ed è definito da:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab \cos \theta \quad [\text{A1.1}]$$

dove θ è l'angolo fra i due vettori. Se uno dei due vettori è zero $\mathbf{0} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{0} = 0$.

Si osservi che il prodotto scalare non è una operazione interna all'insieme dei vettori V in quanto esso fa corrispondere a due elementi di V non un vettore di V ma un numero reale. Il prodotto scalare è solo una funzione da $V \times V$ ad \mathbf{R} . La sua definizione ha scopi utilitaristici.

PROPRIETÀ:

- (a) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = aa \cos 0^\circ = a^2$ cioè moltiplicando scalarmente un vettore per se stesso si ottiene il quadrato del suo modulo;
- (b) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$ ovvio;
- (c) $(z \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = z \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ con z un numero reale qualsiasi;
- (d) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ si rimanda la dimostrazione.

Nel caso dei versori di un sistema di assi ortogonali è facile vedere che:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 1 \quad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 1 \quad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 1 \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = 0 \quad [\text{A1.2}]$$

Da un punto di vista analitico, conoscendo le coordinate dei vettori:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j},$$

si ha che:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j}) = a_x b_x \mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_x b_y \mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_y b_x \mathbf{j} \times \mathbf{i} + a_y b_y \mathbf{j} \times \mathbf{j} = a_x b_y - a_y b_x \mathbf{k} \quad [\text{A1.3}]$$

Questo è un risultato molto importante, perché ci permette, oltre che calcolare facilmente il prodotto scalare di due vettori, conoscendo le loro coordinate, anche di calcolare l'angolo compreso fra due vettori conoscendo le loro coordinate, infatti

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = (a_x b_x + a_y b_y) / ab \quad [\text{A1.4}]$$

ESEMPI:

→ Se $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 1\mathbf{j}$ allora $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 1 = 14$,

inoltre poiché

$$a = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \quad e \quad b = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26} \quad \cos \theta = 14 / (\sqrt{20} \cdot \sqrt{26}) = 0.6139 \quad e \quad \theta = 52^\circ$$

→ Se $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$ allora $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0$.

Quesiti

A1.1. Due vettori \mathbf{A} e \mathbf{B} giacciono nel piano x - y . I loro moduli sono rispettivamente di 4.5 e 7.3 unità e le direzioni sono di 320° e di 85° . Determina il prodotto scalare dei due vettori usando entrambi i metodi, (relazioni A1.1 e A1.2).

A1.2. Il vettore \mathbf{a} ha componenti (5;0) e \mathbf{b} ha componenti (3;3), cioè $\mathbf{a} = 5\mathbf{i}$ e $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Quanto vale il loro prodotto scalare? Consideriamo ora gli stessi vettori in un altro sistema di riferimento, ruotato rispetto al primo di 45° in senso orario. Quali sono le nuove componenti? È cambiato il prodotto scalare? E se il sistema di riferimento è traslato? $[15; (5/\sqrt{2}; 5/\sqrt{2})]$

25.1. Una nuova grandezza: il lavoro

Nel linguaggio comune è lavoro tutto ciò che comporta fatica: usiamo infatti lo stesso termine sia per indicare gli sforzi muscolari che dobbiamo compiere per trasportare o sollevare un oggetto, sia per riferirci ad attività intellettuali che siamo più o meno lieti di eseguire, sia ancora per indicare oggetti che sono il risultato di nostre attività. In fisica, in accordo con le esigenze di rigore e univocità che si vuole caratterizzino il linguaggio scientifico, lavoro non è più un termine dai molteplici significati, ma una grandezza fisica di cui si può parlare solo in riferimento a una forza.

Se una forza \mathbf{F} costante, agendo su un corpo, ne determina uno spostamento $\Delta \mathbf{r}$ dalla posizione \mathbf{r}_0 alla posizione $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}$, il lavoro della forza \mathbf{F} è definito dal prodotto scalare della forza \mathbf{F} e dello spostamento $\Delta \mathbf{r}$:

$$L = \mathbf{F} \times \Delta \mathbf{r} . \quad [25.1]$$

Utilizzando la definizione di prodotto scalare tra vettori, la [25.1] può essere scritta come

$$L = F \Delta r \cos \theta \quad [25.2]$$

dove θ è l'angolo determinato dalle direzioni di \mathbf{F} e $\Delta \mathbf{r}$ (Fig. 25.1 e 25.2).

Dalla definizione di lavoro si deduce che il lavoro di una forza \mathbf{F} è nullo in tre casi, quando:

- (a) $\mathbf{F} = 0$
- (b) $\Delta \mathbf{r} = 0$
- (c) $\mathbf{F} \neq 0, \Delta \mathbf{r} \neq 0, \cos \theta = 0$.

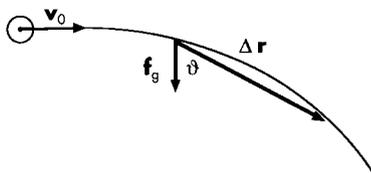


Fig. 25.1. Un sasso, lanciato con velocità iniziale \mathbf{v}_0 , ricade a terra descrivendo una traiettoria parabolica. Mentre si sposta del tratto $\Delta \mathbf{r}$ su di esso agisce la forza di gravità \mathbf{f}_g . Il lavoro compiuto dalla forza di gravità è $L = \mathbf{f}_g \times \Delta \mathbf{r} = f_g \Delta r \cdot \cos \theta$.

Il caso (a) è molto semplice da trattare: se un corpo si muove di moto rettilineo uniforme, la forza risultante \mathbf{F} agente su di esso è nulla. Il lavoro compiuto dalla forza \mathbf{F} sarà di conseguenza nullo.

Il caso (b) riguarda tutte quelle situazioni in cui agiscono forze che tuttavia non producono alcuno spostamento: è il caso, per esempio, del lavoro compiuto da un uomo che tenta, senza riuscirci, di spostare un oggetto (Fig. 25.3).

Il caso (c) riguarda tutte quelle situazioni in cui la direzione della forza

\mathbf{F} e dello spostamento $\Delta \mathbf{r}$ sono tra loro ortogonali ($\theta = 90^\circ$ o $\theta = 270^\circ \Rightarrow \cos \theta = 0$). È, per esempio, il caso della forza centripeta in un moto circolare (Fig. 25.4) o della forza esercitata da un uomo che trasporta una pesante valigia parallelamente al terreno (Fig. 25.5).

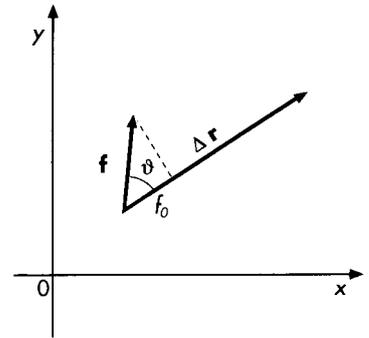


Fig. 25.2. Poiché $f \cdot \cos \theta = f_0$, è solo la componente della forza nella direzione dello spostamento ad essere rilevante ai fini del calcolo del lavoro.

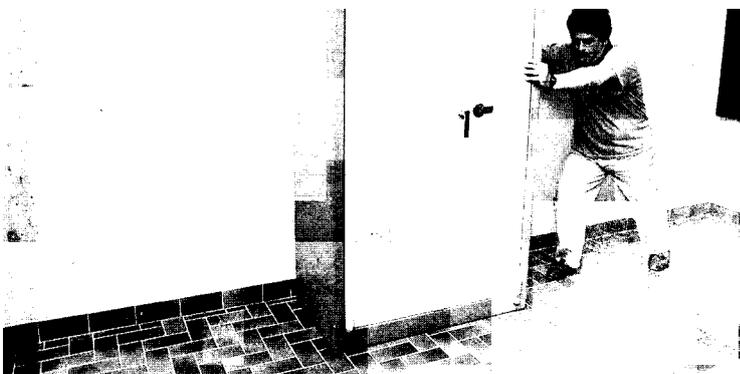


Fig. 25.3. Nonostante gli sforzi, il mobile non si muove. Poiché lo spostamento $\Delta \mathbf{r}$ è nullo, anche il lavoro è nullo.

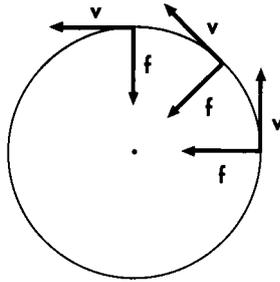


Fig. 25.4. Quando un corpo si muove lungo una traiettoria circolare, il lavoro compiuto dalla forza centripeta \mathbf{F} è nullo, dato che in ogni istante le direzioni della forza \mathbf{F} e del vettore velocità \mathbf{v} sono tra loro ortogonali. Il fatto che in questo esempio si faccio riferimento alla perpendicolarità tra \mathbf{F} e \mathbf{v} e non a quella tra \mathbf{F} e $\Delta\mathbf{r}$, non deve trarre in inganno. \mathbf{v} rappresenta il vettore velocità istantanea che ha, in ogni istante, direzione e verso coincidenti con quelli del vettore spostamento $\Delta\mathbf{r}$, quando l'intervallo di tempo considerato tende a zero.



Fig. 25.5. Nonostante sudi copiosamente, l'uomo, dal punto di vista della fisica, non sta compiendo alcun lavoro. Infatti la direzione in cui avviene lo spostamento e quella lungo cui viene esercitata la forza, sono tra loro perpendicolari.

I casi mostrati in Fig. 25.4 e 25.5 evidenziano chiaramente come la definizione di lavoro utilizzata in fisica coincida solo parzialmente con le accezioni di lavoro del linguaggio comune. In effetti, ci “costa fatica” tenere sollevata da terra una pesante valigia, anche se siamo fermi. Tuttavia, dal punto di vista della fisica, non stiamo compiendo alcun lavoro.

In generale uno spostamento $\Delta\mathbf{r}$ è determinato dall'azione di più forze $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$. In questo caso può interessare conoscere sia il lavoro della forza risultante

$$\mathbf{F}_r = \sum_i \mathbf{F}_i, \tag{25.3}$$

sia il lavoro di una o più delle singole forze agenti.

Indicando con L_r il lavoro della forza risultante \mathbf{F}_r e con L_i il lavoro della forza i -esima, si trova allora che:

$$L_r = \mathbf{F}_r \times \Delta\mathbf{r} \tag{25.4}$$

$$L_i = \mathbf{F}_i \times \Delta\mathbf{r} \tag{25.5}$$

ed è facile verificare che $L_r = \sum_i L_i$.

Infatti

$$L_r = \mathbf{F}_r \times \Delta\mathbf{r} = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots) \times \Delta\mathbf{r} = \sum_i L_i. \tag{25.6}$$

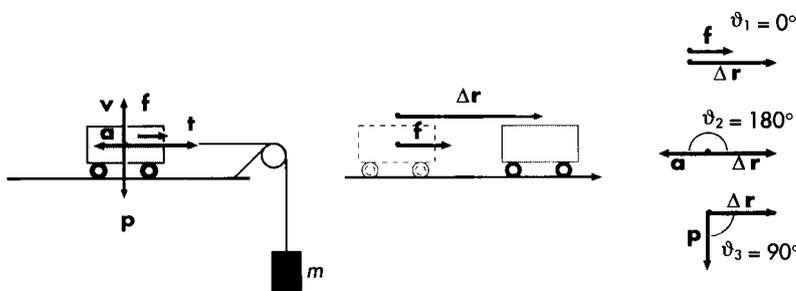


Fig. 25.6. Il carrello su cui agiscono la forza peso \mathbf{p} , la reazione vincolare \mathbf{v} , la forza \mathbf{t} dovuta alla massa m e la forza di attrito \mathbf{a} , è sottoposto ad una forza risultante \mathbf{f} che ne determina uno spostamento dalla posizione \mathbf{r}_0 alla posizione $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}$. Il lavoro della forza \mathbf{f} è: $L = \mathbf{f} \times \Delta\mathbf{r} = f\Delta r \cos\theta_1 = f\Delta r$ poiché $\theta_1 = 0^\circ$. Il lavoro della forza \mathbf{a} è: $L = \mathbf{a} \times \Delta\mathbf{r} = a\Delta r \cos\theta_2 = -a\Delta r$ poiché $\theta_2 = 180^\circ$. Il lavoro della forza \mathbf{p} è: $L = \mathbf{p} \times \Delta\mathbf{r} = p\Delta r \cos\theta_3 = 0$ poiché $\theta_3 = 90^\circ$.

La definizione di lavoro fornita sopra permette di calcolare il lavoro L compiuto da una forza \mathbf{F} , quando \mathbf{F} è *costante*.

Se invece \mathbf{F} non è *costante* per poter calcolare il lavoro che essa compie su un corpo, per spostarlo da una posizione all'altra, è necessario conoscere, oltre alla traiettoria, anche come varia \mathbf{F} lungo il percorso. Esistono alcuni metodi matematici che permettono di affrontare e risolvere il calcolo del lavoro di una forza quando questa non è costante, ma questo punto del corso, si potrà solo accennare ad essi, limitandosi invece a trattare situazioni meno complicate.

Consideriamo, per cominciare, il grafico in un piano rOF_r di Fig. 25.7 che esprime come varia la componente F_r , di una forza \mathbf{F} costante nella direzione dello spostamento \mathbf{r} . Poiché, per definizione, $L = \mathbf{F} \times \Delta \mathbf{r}$ ossia, nel nostro caso $L = F_r \cdot r$, possiamo interpretare il lavoro come la misura dell'area tratteggiata in figura.

Accenniamo solo brevemente a come occorra procedere nei casi in cui la forza di cui si vuole calcolare il lavoro non sia costante. Si abbia, ad esempio, una forza che, per un tratto Δr abbia un andamento come quello rappresentato in Fig. 25.8.

Come nel caso precedente il lavoro L è dato dalla misura dell'area tratteggiata ma questa volta la misura dell'area non è immediatamente determinabile.

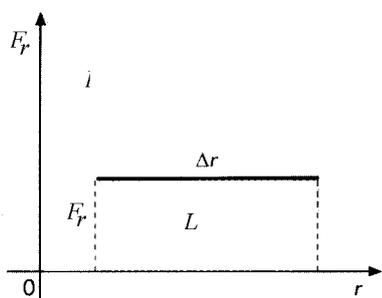


Fig. 25.7. In un grafico (r, F_r) il lavoro di una forza \mathbf{F} lungo un tratto Δr è uguale alla misura dell'area del rettangolo avente come base il modulo dello spostamento Δr e come altezza la componente F_r della forza \mathbf{F} .

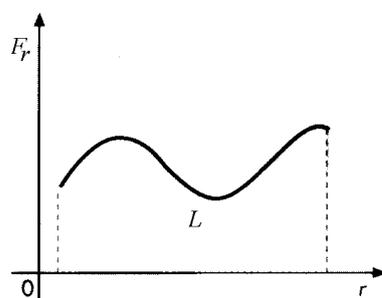


Fig. 25.8. La forza F_r , non è costante. Per poterne calcolare il lavoro lungo lo spostamento r , se non si conoscono gli strumenti di calcolo dell'analisi matematica, è necessario utilizzare dei metodi grafici alquanto laboriosi.

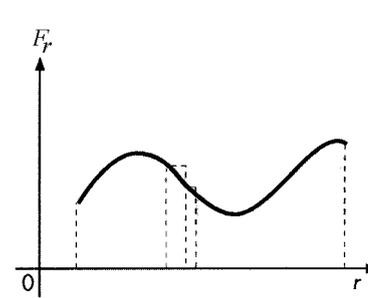


Fig. 25.9. Il lavoro totale compiuto dalla F_r è dato dalla somma dei lavori L_i , lungo tutti i tratti i -esimi in cui deve essere suddiviso il percorso. Quanto più sono piccoli gli spostamenti considerati, tanto meglio l'area dei rettangoli così individuati approssimerà l'area effettivamente sottesa alla curva.

Per determinarla (Fig. 25.9) si suddivide lo spostamento totale in tanti tratti Δr_i , tali che lungo ognuno di essi la forza \mathbf{F} possa essere considerata, con buona approssimazione, costante. Il lavoro della forza durante ognuno degli spostamenti della suddivisione, sarà dato dall'area tratteggiata sottesa alla curva, area che approssimerà tanto più quella del rettangolo quanto più sarà piccolo lo spostamento considerato. Il lavoro totale è dato dalla somma dei lavori lungo ognuno dei tratti estremamente piccoli in cui è stato suddiviso il percorso, ossia:

$$L = \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum_i L_i \quad [25.7]$$

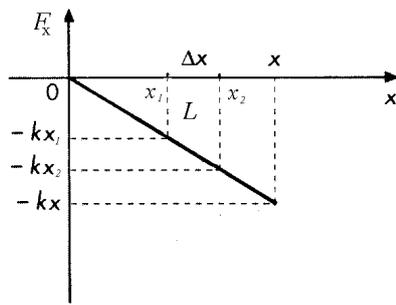


Fig. 25.10. Il lavoro L eseguito dalla forza F_x lungo il tratto Δx è dato dalla misura A della superficie del trapezio tratteggiato in figura. Poiché

$$A = \frac{1}{2}(-kx_1 - kx_2)\Delta x = -\frac{1}{2}k(x_1 + x_2) \cdot (x_2 - x_1)$$

si avrà che: $L = \frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2)$.

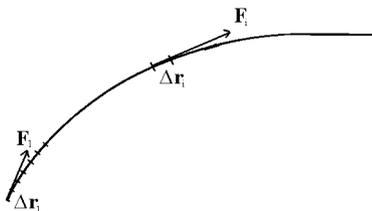


Fig. 25.11.

Nel caso particolare in cui la forza di cui si vuole calcolare il lavoro lungo un tratto Δr di modulo Δr sia la forza elastica, la cui espressione è data da $F = -k \cdot x$, il metodo grafico accennato sopra consente di trovare un'espressione del lavoro particolarmente semplice. Il lavoro della forza elastica è infatti espresso dalla misura della superficie del triangolo sotteso, in un piano xOF_x , al grafico della curva $F_x = -kx$ (Fig. 25.10).

Il lavoro durante lo spostamento dalla posizione di equilibrio è negativo dato che il verso della forza elastica e dello spostamento sono tra loro opposti ($\theta = 180^\circ \Rightarrow \cos\theta = -1$).

Da notare che il lavoro compiuto dalla forza elastica per spostare un corpo dall'origine ad x vale:

$$L = -\frac{1}{2}kx^2 \quad [25.8]$$

Quando occorre calcolare il lavoro fatto da una forza variabile lungo una traiettoria curvilinea γ occorre fare una operazione di integrazione più complessa (Fig. 25.11) suddividendo la traiettoria in tanti spostamenti infinitesimi Δr_i :

$$L_\gamma = \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum_i L_i = \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \left(\sum_i \mathbf{F}_i \times \Delta \mathbf{r}_i \right) = \int_\gamma \mathbf{F} \times d\mathbf{r} . \quad [25.9]$$

Nel Sistema Internazionale l'unità di misura del lavoro è il **joule**, indicato con il simbolo **J**, corrispondente al lavoro eseguito da una forza di un newton che determina uno spostamento di un metro. Quindi:

$$1J = 1N \times 1m . \quad [25.10]$$

Le dimensioni del *lavoro* sono quelle di una *forza* per uno *spostamento*:

$$[\text{lavoro}] = [\text{forza}] [\text{spostamento}] \quad [25.11]$$

ossia:

$$[\text{lavoro}] = [M] [L^2] [T^{-2}] = [M \cdot L^2 \cdot T^{-2}] \quad [25.12]$$

Quesiti

25.1. Contando i quadratini nella Fig. A, trovate il lavoro compiuto da una forza su un corpo in moto:

- (a) nei primi 3 m;
- (b) nei successivi 2 m.

25.2. Un operaio deve sollevare una cassa di massa 72 kg dal suolo a una piattaforma situata a un'altezza di 1.5 m. Lo fa collocando la cassa su un carrello e spingendola all'insù su un piano inclinato lungo 4.5 m (Fig. B).

- (a) Qual è la forza minima che egli deve esercitare sulla cassa se vuole sollevarla direttamente?
- (b) Qual è la forza minima che egli deve esercitare parallelamente al piano inclinato per spostare la cassa e il carrello? (La massa del carrello si può trascurare.)

(c) Quanto lavoro compirebbe se sollevasse la cassa direttamente?

(d) Quanto lavoro compie spingendo la cassa e il carrello all'insù sul piano inclinato?

(e) In base alle risposte ai punti (c) e (d), qual è il vantaggio dell'usare il piano inclinato?

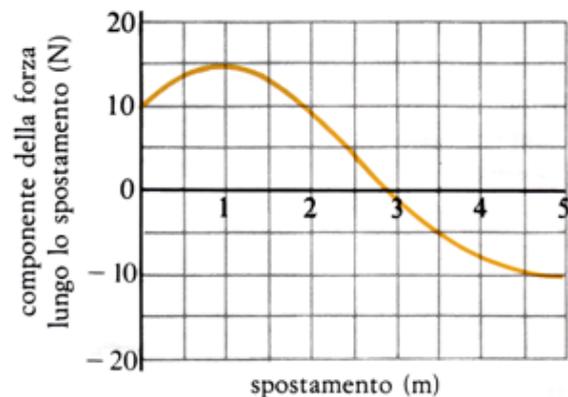


Fig. A

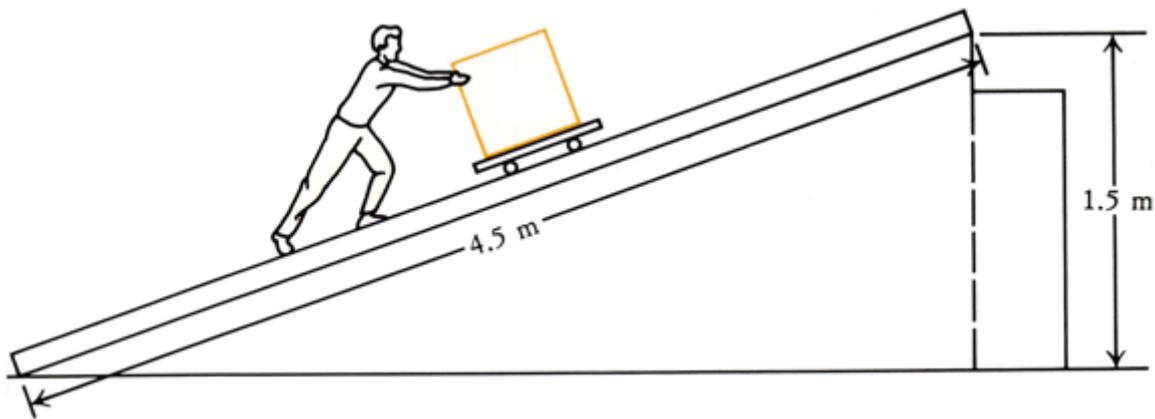


Fig. B

25.3. Una particella di 4 kg è inizialmente ferma nel punto $x=0$ m. Essa viene sottoposta ad una singola forza F_x , che varia in funzione della posizione x come mostrato in Fig. C.

- Si trovi il lavoro che viene compiuto dalla forza mentre la particella si sposta da $x=0$ m a $x=3$ m;
- Si trovi il lavoro che viene compiuto dalla forza mentre la particella si sposta da $x=3$ m a $x=6$ m;
- Si trovi il lavoro che viene compiuto dalla forza mentre la particella si sposta da $x=0$ m a $x=7$ m.

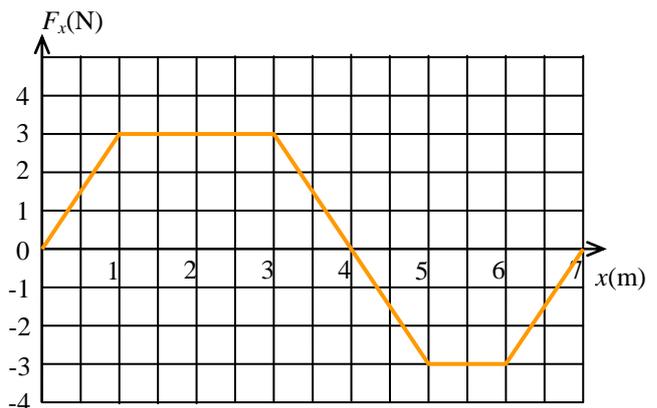


Fig. C

25.4. Una particella di 10 kg si muove con la velocità di 4 m/s quando si trova nel punto $x = 0$ m. Essa viene sottoposta ad una singola forza F_x , che varia in funzione della posizione x come mostrato in Fig. D. Quanto lavoro viene compiuto dalla forza mentre la particella si sposta da $x=0$ m a $x=5$ m?

25.5. Un blocco di 0.4 kg poggiato su un tavolo privo di attrito è attaccato ad una molla orizzontale che obbedisce alla legge di Hooke ed esercita una forza $F_x = -kx$, dove x è misurata a partire dalla lunghezza di equilibrio della molla e la costante elastica è $k = 20$ N/m. La molla viene allungata fino a $x_1 = +6$ cm. Si trovino:

- il lavoro compiuto dalla molla mentre il blocco si sposta da $x_1 = 6$ cm alla posizione di equilibrio $x_2 = 0$ cm;
- la velocità del blocco per $x_2 = 0$ cm.

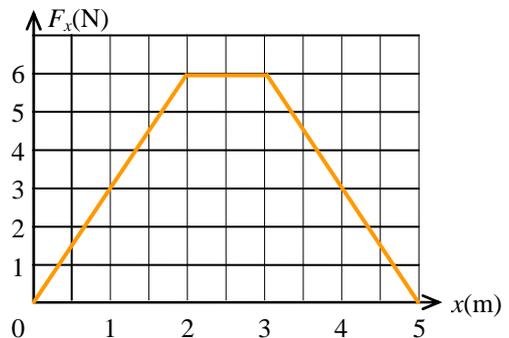


Fig. D

25.2. Quando i sistemi non sono isolati: teorema dell'energia cinetica (o delle forze vive)

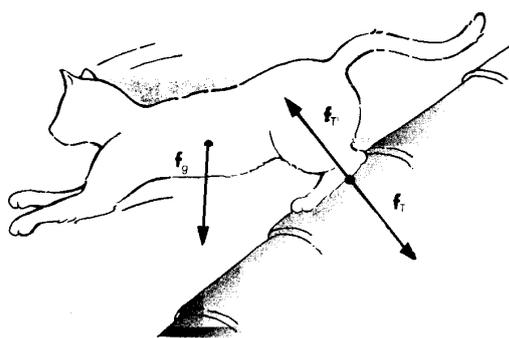


Fig. 25.12. Il gatto in figura non costituisce un sistema isolato. Al “sistema-gatto” quindi, non è applicabile il principio di conservazione della quantità di moto.

Abbiamo visto nel paragrafo 24.7 a pag. 287 che quando un sistema è isolato la sua quantità di moto si mantiene costante.

Ciò permette di ottenere informazioni sulla evoluzione dinamica di un sistema, anche senza conoscere dettagliatamente come variano le forze agenti su ognuno dei suoi componenti.

Quando il sistema non è isolato, come nel caso rappresentato in Fig. 25.12, si ripropone il problema di dover conoscere istante per istante l'andamento delle forze in gioco.

Cerchiamo allora di analizzare in dettaglio le relazioni che intercorrono tra le grandezze a noi note nel caso di sistemi non isolati. L'obiettivo è di formulare, se possibile, uno strumento che giochi un ruolo analogo a quello svolto dal teorema di

conservazione della quantità di moto nel caso dei sistemi isolati.

Scegliamo a questo scopo un sistema non isolato particolarmente semplice da trattare, per esempio quello costituito da un corpo che, sotto l'azione di una forza costante, si muova di moto uniformemente accelerato (Fig. 25.13).

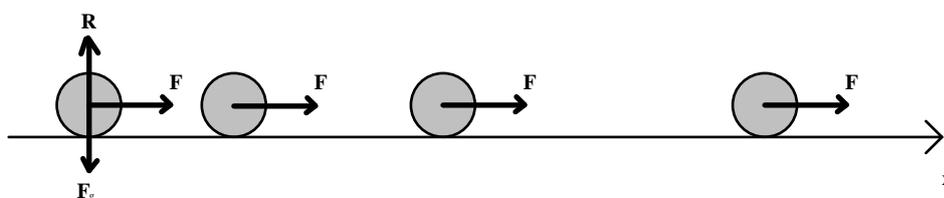


Fig. 25.13. Il “sistema biglia” non è isolato dato che su di esso agisce una forza **F** esterna al sistema. In realtà agisce anche la forza peso che risulta però esattamente equilibrata dalla reazione vincolare del piano.

Il lavoro della forza **F** nel tratto Δx corrisponderà allora alla misura dell'area tratteggiata in Fig. 25.14, che rappresenta il modulo della forza **F** in funzione dello spostamento.

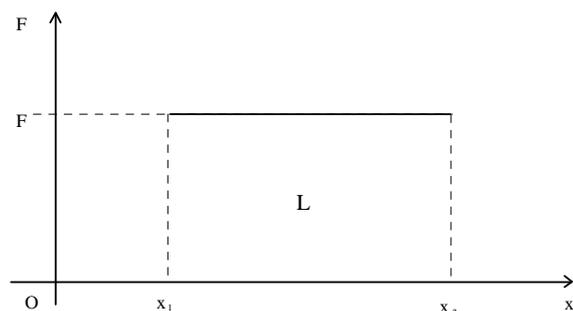


Fig. 25.14. Nel grafico viene riportato il modulo della forza **F** in funzione dello spostamento. La direzione lungo cui si muove la biglia è stata scelta coincidente con la direzione positiva dell'asse delle ascisse.

Avremo perciò che, mentre il corpo passa dalla posizione x_1 , alla posizione $x_2 = x_1 + \Delta x$:

$$L_{12} = \mathbf{F} \times \Delta \mathbf{r} = F \cdot \Delta x \quad [25.13]$$

Si avrà quindi che:

$$\begin{aligned} L_{12} &= ma\Delta x = m \frac{\Delta v}{\Delta t} \left(v_1 \Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2 \right) = \\ &= m \frac{(v_2 - v_1)}{\Delta t} \left(v_1 \Delta t + \frac{1}{2} \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} (\Delta t)^2 \right) = \\ &= m \frac{(v_2 - v_1)}{\Delta t} \frac{(v_1 + v_2)}{2} \end{aligned}$$

e cioè:

$$L_{12} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad [25.14]$$

La grandezza $\frac{1}{2} m v^2$ che compare nella [25.14] viene chiamata **energia cinetica**, ed è solitamente indicata con il simbolo T (oppure E_c). Possiamo allora esprimere il risultato cui siamo pervenuti nella forma:

$$L_{12} = T_2 - T_1 = \Delta T \quad [25.15]$$

ed affermare di conseguenza che:

il lavoro eseguito da una forza F su un sistema è uguale alla variazione di energia cinetica del sistema.

Questo risultato, ottenuto nel caso di una forza costante, è valido anche per forze variabili con la posizione e viene detto *teorema dell'energia cinetica o delle forze vive*. La dimostrazione, da farsi con una tecnica del tutto analoga a quella vista nel paragrafo 4, viene omessa in questa sede dato che risulterebbe inutilmente complicata e farragিনosa, se svolta solo con metodi grafici.

Dalla relazione [25.15] si deduce che, poiché il lavoro L è una grandezza scalare, tale deve essere anche l'energia cinetica T . A questa stessa conclusione, del resto, si poteva arrivare osservando che le energie cinetiche di due corpi che si muovono con velocità opposte o con velocità uguali in modulo ma lungo direzioni diverse, saranno comunque uguali. Si ha infatti (Fig. 25.15), che:

$$\frac{1}{2}m(+v)^2 = \frac{1}{2}m(-v)^2 \quad [25.16]$$

Nel SI l'unità di misura dell'energia cinetica è il **joule**, la stessa unità di misura che viene utilizzata per il lavoro.

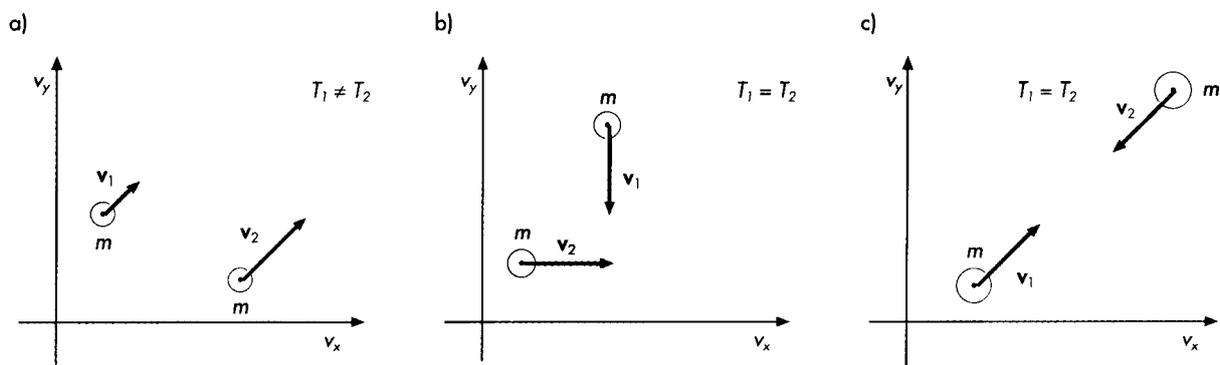


Fig. 25.15. (a) Due corpi di ugual massa che si muovono con velocità diverse in modulo, ma uguali in direzione e verso, hanno energie cinetiche differenti: l'energia cinetica è una grandezza che dipende dal modulo della velocità. (b) Due corpi di ugual massa che si muovono in direzioni diverse con velocità uguali in modulo, hanno energie cinetiche uguali: l'energia cinetica è una grandezza che non dipende dalla direzione della velocità. (c) Due corpi di ugual massa che si muovono con velocità uguali in modulo e direzione, ma opposte in verso, hanno la stessa energia cinetica: l'energia cinetica è una grandezza che non dipende né dal verso, né dalla direzione della velocità. Quindi è una grandezza scalare e non vettoriale.

Quesiti

- 25.6.** Esprimete l'unità di misura dell'energia cinetica, il joule, per mezzo delle unità fondamentali kilogrammo, metro e secondo.
- 25.7.** Un'autovettura ha una massa di 1.0×10^3 kg e il suo motore è capace di spingerla con una forza risultante media di 3.0×10^3 N. Supponete che l'autovettura entri nella corsia di accelerazione a una velocità di 8.0 m/s e i veicoli sull'autostrada stiano marciando a 25 m/s. Quanto deve essere lunga la corsia di accelerazione?
- 25.8.** Due automobili, di massa 500 kg e 1000 kg, sono inizialmente in quiete. Ciascuna automobile viene accelerata da una forza di 2.0×10^3 N su una distanza di 300 m.
- Confrontate il lavoro compiuto sulla prima automobile e quello compiuto sulla seconda.
 - Confrontate le energie cinetiche acquistate dalle due automobili.
 - Trovate il rapporto fra le velocità delle due automobili.
- 25.9.** Confrontate le energie cinetiche di due corpi A e B identici sotto ogni aspetto, tranne uno. Supponete che questa singola differenza sia:
- il corpo A ha una velocità doppia di quella del corpo B.
 - il corpo A si muove verso nord, il corpo B verso sud.
 - il corpo A si muove di moto circolare, il corpo B di moto rettilineo.
 - il corpo A è un proiettile che cade verticalmente verso il basso e il corpo B è un proiettile che si muove verticalmente verso l'alto con la stessa velocità.

25.10. Due corpi di masse diverse hanno la stessa energia cinetica e si muovono nella stessa direzione orientata. Sapendo che a ciascun corpo viene applicata la stessa forza ritardatrice, confrontate le distanze entro cui i due corpi si fermano.

25.3. Energia cinetica e sistemi di riferimento

L'energia cinetica di un corpo di massa m dipende dal quadrato della velocità: poiché la velocità dipende dal sistema di riferimento in cui è misurata, *anche l'energia cinetica dipenderà dal sistema di riferimento rispetto al quale la valutiamo.*

In particolare, una volta fissato un sistema di riferimento, solo corpi in moto rispetto ad esso avranno energia cinetica diversa da zero. Questo spiega perché l'energia cinetica sia intesa nell'accezione comune e scientifica come *energia di movimento* (dal greco *kinesis* che significa movimento).

Come esempio consideriamo un uomo che cammina sopra una treno a sua volta in movimento: (a) rispetto a un sistema di riferimento connesso con il terreno, sia il treno che l'uomo hanno energia cinetica non nulla; (b) rispetto al sistema di riferimento connesso con il treno, l'uomo ha energia cinetica diversa da zero, il treno risulta invece avere energia cinetica nulla; (c) se il sistema di riferimento è connesso con il centro di massa dell'uomo, è il treno ad avere energia cinetica diversa da zero, mentre l'energia cinetica dell'uomo è nulla.

In un linguaggio sintetico potremmo dire che l'energia cinetica non è invariante per trasformazioni galileiane.

È facile dimostrare, a partire dalle trasformazioni galileiane $\mathbf{v}^* = \mathbf{v} - \mathbf{w}$, che, dati due sistemi di riferimento inerziali S e S^* , con S^* in moto lungo l'asse x con velocità \mathbf{w} rispetto a S , per un corpo di massa m in moto con velocità \mathbf{v} rispetto a S e velocità \mathbf{v}^* rispetto a S^* , si ha:

$$T^* = \frac{1}{2} m v^{*2} = T - m\mathbf{v}\mathbf{w} + \frac{1}{2} m w^2 \quad [25.17]$$

e, passando alle variazioni:

$$\Delta T^* = \Delta T - m\mathbf{w}\Delta\mathbf{v}. \quad [25.18]$$

La [25.18] ci consente di concludere che *anche la variazione di energia cinetica è differente nei due sistemi di riferimento S e S^* .*

Ha senso allora domandarsi se il teorema dell'energia cinetica mantenga la sua validità in tutti i sistemi di riferimento in *m.r.u.* uno rispetto all'altro (*sistemi di riferimento inerziali*), o meglio, se il fatto che il teorema dell'energia cinetica sia valido in un sistema di riferimento S implichi necessariamente la sua validità in tutti i sistemi di riferimento in *m.r.u.* rispetto a S (sistemi di riferimento inerziali).

Si ricava abbastanza facilmente che *il teorema dell'energia cinetica mantiene la sua validità in tutti i sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro.* Se cioè, rispetto ad un sistema di riferimento S , un sistema non è isolato, ed è quindi valido per esso la relazione $L = \Delta T$, il sistema risulterà non isolato rispetto a qualunque altro sistema di riferimento in quiete o in moto rettilineo uniforme rispetto a S . In ognuno di questi sistemi di riferimento, la relazione $L = \Delta T$ continuerà ad essere valida. Si dice perciò che il *teorema dell'energia cinetica è covariante* per trasformazioni di Galilei.

Problemi di fine capitolo

- 25.11.** La carrozza di un treno incrementa la propria velocità di 10 m/s una volta a partire dalla quiete e un'altra a partire da 20 m/s. In quale dei due casi occorre compiere un lavoro maggiore?
- 25.12.** Un'automobile di 1200 kg che si muove a 25 m/s frena e blocca le ruote, slittando fino a fermarsi. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza di attrito.
- 25.13.** Una particella di 4 kg è inizialmente ferma nel punto $x=0$ m. Essa viene sottoposta ad una singola forza F_x , che varia in funzione della posizione x come mostrato in Fig. C a pag. 296.
(a) Si trovi l'energia cinetica della particella quando essa si trova nel punto $x = 3$ m.
(b) Si trovi l'energia cinetica della particella quando essa si trova nel punto $x = 6$ m.
- 25.14.** Una particella di 10 kg si muove con la velocità di 4 m/s quando si trova nel punto $x = 0$ m. Essa viene sottoposta ad una singola forza F_x , che varia in funzione della posizione x come mostrato in Fig. D a pag. 296.
(a) Qual è l'energia cinetica della particella quando si trova nel punto $x = 0$ m?
(b) Quanto lavoro viene compiuto dalla forza mentre la particella si sposta da $x = 0$ m a $x = 5$ m?
(c) Qual è la velocità della particella quando è nel punto $x = 5$ m?
- 25.15.** Una particella di massa 200 g viene lasciata cadere lungo un piano inclinato di 30° sull'orizzontale. Qual è l'energia cinetica acquistata quando ha percorso 2 metri lungo il piano?
- 25.16.** Un sasso di 2.0 kg ruota all'estremità di un filo lungo 0.50 m con una frequenza di 2.0 giri al secondo.
(a) Qual è l'energia cinetica del sasso?
(b) Qual è la forza centripeta che agisce sul sasso?
(c) Quanto lavoro viene compiuto dalla forza centripeta agente sul sasso durante un giro?
- 25.17.** Un'automobile viaggia a velocità costante su una strada in salita con pendenza costante.
(a) Qual è la forza risultante che agisce sull'automobile?
(b) Quanto lavoro viene compiuto sull'automobile mentre percorre la strada in salita?
(c) Tenendo presenti le risposte ai punti (a) e (b), spiegate perché si deve continuare a premere sull'acceleratore.
- 25.18.** Supponete che il corpo della Fig. A a pag. 295 abbia 3 J di energia cinetica in $x = 0$ m.
(a) Qual è la sua energia cinetica in $x = 5$ m?
(b) Potete stabilire, in base al grafico, in quale posizione il corpo comincia a rallentare? In caso affermativo, qual è questa posizione?
(c) Potete stabilire, in base al grafico, in quale posizione il corpo inverte il verso del moto? In caso affermativo, in quale posizione?
- 25.19.** Un corpo di massa m a velocità v esplode spezzandosi in due frammenti in uno spazio caratterizzato da assenza di gravità. Un frammento si ferma. Quanta energia cinetica è stata aggiunta al sistema?
- 25.20.** Stimare la vostra energia cinetica (in joule) quando andate in bicicletta sulla strada.
- 25.21.** Una persona colpisce un chiodo con un martello di 0.75 kg che si muove a 10 m/s, conficcando per 1.5 cm il chiodo in un pezzo di legno.
(a) Qual è l'energia cinetica del martello?
(b) La forza di attrito fra due corpi solidi ha sempre verso opposto a quello della velocità, ma, con buona approssimazione, è indipendente dal modulo della velocità. Con queste informazioni, quanto vale la forza media che si oppone al moto del chiodo?
- 25.22.** Secondo l'American Automobile Association, un'automobile che si muove alla velocità di 24 m/s (circa 86 km/h) richiede circa 40 m per arrestarsi con sicurezza dal punto in cui il guidatore aziona i freni. Poiché i ceppi dei freni premono contro il tamburo solidale con la ruota, il quale ha un raggio pari a circa il 40% del raggio esterno della ruota, lo spazio lungo il quale agisce la forza di attrito è circa il 40% della distanza di arresto. Supponete che la massa dell'automobile sia 1×10^3 kg. Quanto vale la forza frenante media per ogni ruota?
- 25.23.** Tre persone, ciascuna delle quali spinge con una forza di 130 N, riescono a malapena a far muovere un'automobile in panne (massa 1400 kg) su una strada orizzontale. Sapendo che ogni persona spinge con una forza di 140 N per fare arrivare l'automobile a una stazione di servizio distante 100 m:
(a) Quanto lavoro compiono spingendo l'automobile fino alla stazione di servizio?
(b) Qual è l'energia cinetica dell'automobile all'arrivo?
(c) Qual è la velocità dell'automobile all'arrivo?

- 25.24.** Supponete di volere determinare la forza che i freni della vostra bicicletta esercitano su di essa quando frenate energicamente senza slittare. Supponete che i freni stringano il cerchio della ruota. Avete a disposizione un nastro metrico per misurare la lunghezza e una strada di pendenza costante nota. Inoltre, conoscete il peso totale vostro e della bicicletta. Non disponete di un orologio. Come risolvereste il problema?
- 25.25.** La Fig. E è una rappresentazione schematica di una leva usata per sollevare carichi pesanti. Invece di spingere verso l'alto con una forza di modulo F_1 , si spinge verso il basso con una forza di modulo F_2 .
- Se il peso del carico da sollevare è P , qual è il valore minimo di F_1 necessario per sollevare il carico?
 - Supponete che si possano trascurare l'attrito e il peso della leva. Qual è il rapporto tra il lavoro compiuto da F_2 nel produrre lo spostamento d_2 e il lavoro compiuto da F_1 nel sollevare il carico verticalmente di d_1 ?
 - In base alla risposta al punto (b), esprimete F_2 in funzione di F_1 . Un dispositivo che equilibra una grande forza, F_1 , con una piccola, F_2 , facendo in modo che lo spostamento del punto di applicazione della seconda forza sia molto maggiore di quello della prima, è detto *macchina semplice*.
 - In base alla Fig. E, qual è la relazione tra il rapporto d_2/d_1 e il rapporto L_2/L_1 ?
 - Esprimete F_2 in funzione di F_1 e del rapporto L_2/L_1 .

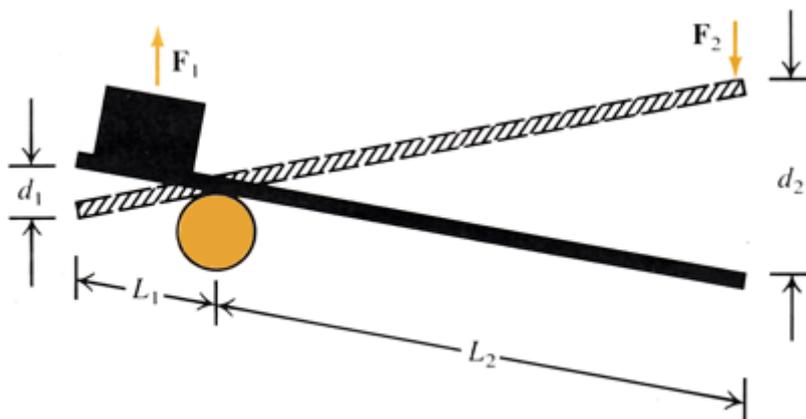


Fig. E