26. PRINCIPI DI CONSERVAZIONE – URTI

26.1. Quando non si conserva l'energia cinetica: gli urti anelastici

Nel paragrafo 25.2 a pag. 297 abbiamo ricavato la relazione $L = \Delta T$ tra variazione di energia cinetica di un sistema non isolato e lavoro delle forze esterne agenti su di esso, nel tentativo di formulare un teorema di conservazione valido all'interno di sistemi non isolati.

La relazione ottenuta tuttavia, mostra chiaramente che l'obiettivo non è stato raggiunto.

Poiché abbiamo ottenuto $\Delta T = L$ e non $\Delta T = 0$, dobbiamo dedurre che, in un sistema non isolato, l'energia cinetica in generale non si conserva.

Prima di dedicarci alla ricerca di un altro possibile teorema di conservazione, analizziamo tuttavia *cosa succede dell'energia cinetica quando il sistema è isolato.*

Si consideri, per esempio, la situazione rappresentata in Fig. 26.1, dove è mostrato l'urto tra due corpi che proseguono poi con la stessa velocità.

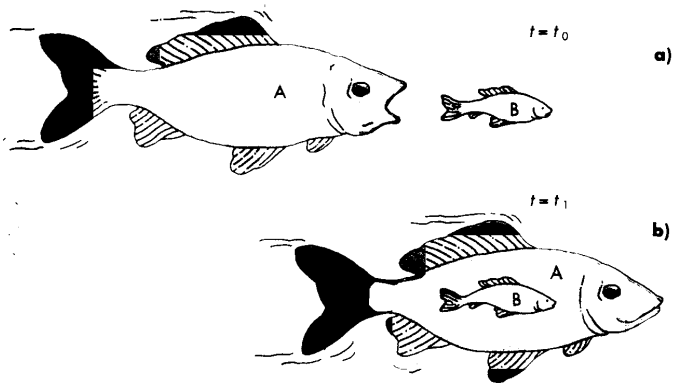

Fig. 26.1. Nell'istante $t=t_0$ il pesce più piccolo è fermo, successiva-mente, per $t=t_1$ i due pesci si muovono entrambi con la stessa velocità.

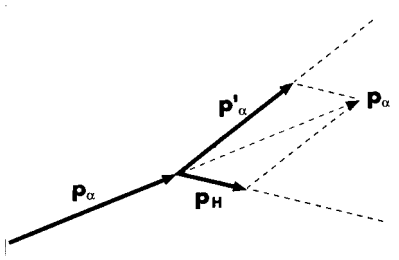

Fig. 26.2. Nel disegno è rappresentato l'urto tra una particella α e un atomo di idrogeno. La traiettoria della particella viene deviata, mentre l'atomo di H viene messo in movimento.

L'uso del termine **urto** per la situazione in figura non deve stupire. In fisica si parla di urto *ogni volta che due corpi raggiungono una distanza tale che la loro mutua interazione ne modifichi in qualche modo il moto*. Di conseguenza in astronomia si parlerà di urto, tra due corpi anche se essi si trovano a una distanza di migliaia di kilometri l'uno dall'altro, poiché, a quelle distanze, il moto dei corpi risulta influenzato dall'interazione gravitazionale.

A livello atomico invece, si potrà parlare di urto solo per distanze non superiori a 10^{-3} m circa, oltre le quali l'interazione nucleare non determina significative modificazioni nel moto delle particelle interagenti (Fig. 26.2).

Per quanto riguarda la situazione proposta in Fig. 26.1, si può osservare che nell'intervallo di tempo Δt in cui il pesce *A* ingoia *B*, il sistema *A+B* può, con ottima approssimazione, essere considerato isolato. Trascurando l'attrito o altre eventuali forze non nulle, non commettiamo in questo caso grosse imprecisioni: nell'intervallo di tempo Δt è comunque l'interazione tra i due pesci ad essere rilevante.

Possiamo allora applicare al sistema *A+B*, il teorema di conservazione della quantità di moto e scrivere, con ovvio significato dei simboli usati:

$$\mathbf{p}'_{A+B} = \mathbf{p}_{A+B} \qquad [26.1]$$

ossia, poiché $\mathbf{v}_B = \mathbf{0}$:

$$(m_A + m_B)\cdot\mathbf{v}' = m_A\cdot\mathbf{v}_A\,, \qquad [26.2]$$

dato che $\mathbf{v}'_A = \mathbf{v}'_B$.

Valutiamo ora, prima e dopo l'urto, l'energia cinetica complessiva del sistema:

$$T_{A+B} = T_A + T_B = \frac{1}{2}m_A v_A^2 = \frac{(m_A v_A)^2}{2m_A} = \frac{p_A^2}{2m_A} \quad (*) \qquad [26.3]$$

(*) È facile ricavare l'importante relazione tra l'energia cinetica e la q.d.m. $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{m} = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m}$

$$T'_{A+B} = \frac{p'^2_{A+B}}{2(m_A + m_B)} = \frac{p_A^2}{2(m_A + m_B)} < T_{A+B} \text{ [7.3]} \qquad [26.4]$$

dato che la quantità di moto complessiva del sistema si conserva.

Dalle 26.3] e [26.4] si deduce immediatamente che, un sistema isolato, non è detto che l'energia cinetica si conservi. Inoltre, nel tipo di urto preso in considerazione, l'energia cinetica finale del sistema è minore di quella iniziale. Poiché sappiamo che la risultante delle forze esterne agenti sul sistema è nulla, dobbiamo per ora ipotizzare che l'energia cinetica mancante sia stata in qualche modo persa o trasformata.

Gli urti del tipo di quello preso in considerazione, in cui l'energia cinetica non si conserva, pur conservandosi la quantità di moto, vengono chiamati **urti anelastici**. (Fig. 26.3 e 26.4).

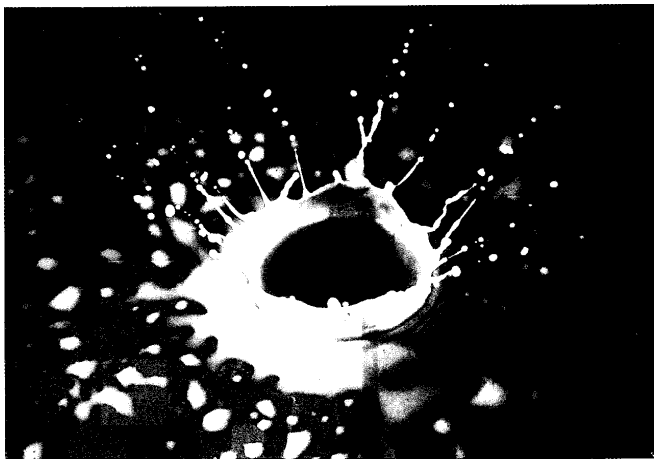

Fig. 26.3. In figura è mostrato un tipo di urto, per contatto, che lascia irrimediabilmente deformato uno dei due corpi.

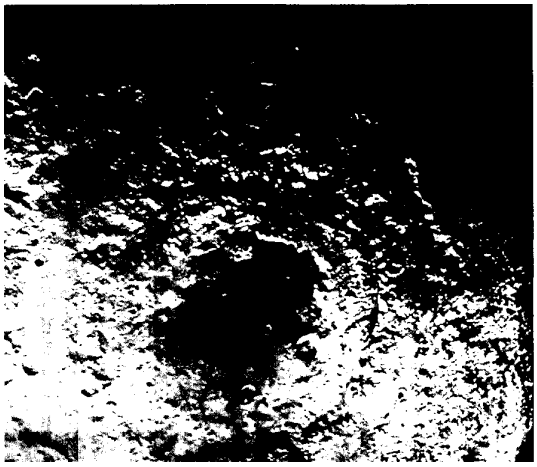

Fig. 26.4. L'impatto tra un meteorite e la superficie lunare, ha prodotto il cratere denominato Orientalis sulla faccia nascosta della Luna. Gli urti che avvengono in modo da produrre deformazioni permanenti degli oggetti coinvolti nell'urto, si chiamano anelastici.

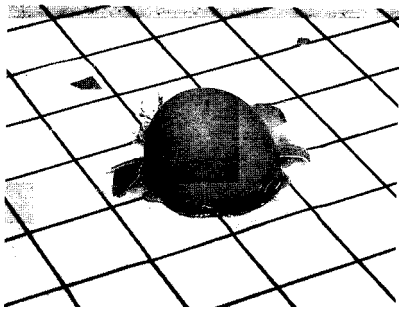

Fig. 26.5. Urto in cui tutta l'energia cinetica va perduta.

Gli urti possono essere più o meno anelastici a seconda della percentuale di energia cinetica che viene perduta. L'urto tra due palle da biliardo e, per esempio**,** meno anelastico di quello tra una palla da biliardo e una palla di stoffa ripiena di segatura: nel primo caso infatti la variazione di energia cinetica è quasi nulla; nel secondo è significativamente diversa da zero.

Analogamente, l'urto di una palla contro un materasso è meno anelastico di quello di un uovo che si rompe cadendo al suolo (Fig. 26.5).

In ogni caso, in tutti gli urti anelastici, l'energia cinetica non si conserva ed è, dopo l'urto, minore di quella iniziale.

26.2. Quando l'energia cinetica si conserva: urti elastici

I corpi, oltre che anelasticamente, possono urtarsi *elasticamente* e, in questo caso, sia la quantità di moto che l'energia cinetica complessive del sistema vengono conservate. In un urto perfettamente elastico cioè, sono contemporaneamente verificate le condizioni:

$$\Delta \mathbf{p}_{tot} = \mathbf{0} \qquad [26.5]$$

e

$$\Delta T_{tot} = 0 \qquad [26.6]$$

Gli urti elastici possono essere più o meno "perfetti" a seconda della percentuale di energia cinetica che non si conserva.

È facile distinguere tra un urto *perfettamente elastico* e uno *completamente anelastico*: in un caso la variazione di energia cinetica è nulla, nell'altro è massima.

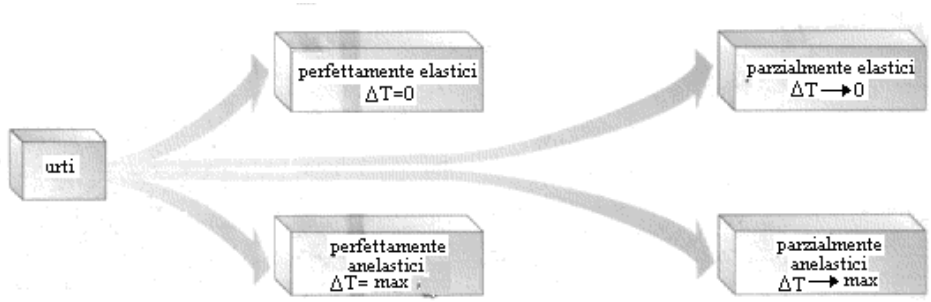

Fig. 26.6. Schema riassuntivo delle caratteristiche con cui varia l'energia cinetica nei vari tipi di urto.

Gli urti che avvengono con caratteristiche intermedie tra queste due condizioni estreme, vengono considerati parzialmente elastici o anelastici a seconda che la quantità ΔT di energia cinetica persa, sia più *vicina a zero* o al *valore massimo consentito* (Fig. 26.6).

L'urto di Fig. 26.7 tra la palla e il muro è un buon urto elastico, quello di Fig. 26.8 tra il bambino e il materasso del letto è un urto elastico tutt'altro che perfetto, quello di Fig. 26.9 tra due nuclei di elio, può essere considerato perfettamente elastico.

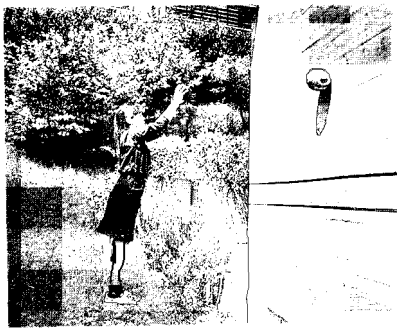

Fig. 26.7. Nella foto è rappresentato un urto quasi "perfettamente elastico", dato che, ad ogni rimbalzo, si ha solo una piccola variazione di energia cinetica.

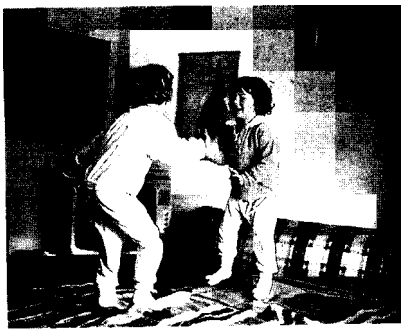

Fig. 26.8. L'urto elastico tra il bambino e il materasso è ben lontano dall'essere un urto perfettamente elastico. Tuttavia si parla comunque di urto elastico, perché i due corpi non subiscono deformazioni permanenti.

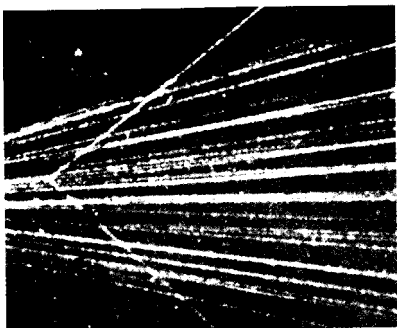

Fig. 26.9. In figura è rappresentato l'urto elastico tra due particelle α. L'urto è perfettamente elastico, almeno entro i limiti di precisione delle misure: si conservano sia la quantità di moto che l'energia cinetica.

Ciò che accomuna i tre urti è il fatto che i corpi interagenti non subiscono deformazioni permanenti, condizione questa, che caratterizza ogni urto elastico.

Occupiamoci dell'analisi degli urti elastici, cominciando, per semplicità, con l'esaminare la situazione di Fig. 26.10.

In essa due corpi *A* e *B*, di ugual massa, si muovono l'uno verso l'altro con velocità $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$ rispettivamente, rispetto al piano di appoggio e in modo tale che l'urto sia unidimensionale.

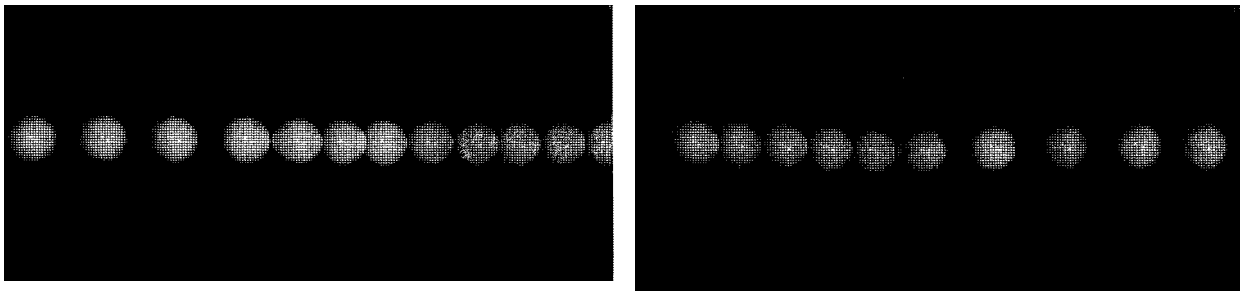

Fig. 26.10. Urto tra due palle da biliardo. L'urto rappresentato in figura è un elastico, caratterizzato cioè dalla conservazione contemporanea della quantità di moto e dell'energia cinetica. Poiché i due corpi hanno 1a stessa massa, dopo l'urto si muoveranno in modo che: $v'_A = v_B$; $v'_B = v_A$.

Supponendo che il sistema sia isolato, poiché se ne conserva la quantità di moto complessiva, potremo scrivere, passando alla notazione scalare, che:

$$p'_{A+B} = p_{A+B} \qquad [26.7]$$

ossia, poiché i due corpi hanno ugual massa:

$$m(v'_A + v'_B) = m(v_A + v_B) \qquad [26.8]$$

da cui:

$$(v'_A + v'_B) = (v_A + v_B). \qquad [26.9]$$

La [26.9] è un'equazione di primo grado nelle due incognite v'_A e v'_B, che ammette infinite soluzioni. Tuttavia una sola tra le infinite soluzioni compatibili con la conservazione della quantità di moto del sistema garantisce anche la conservazione dell'energia cinetica.

Poiché in un urto elastico deve anche essere che:

$$T'_{A+B} = T_{A+B} \qquad [26.10]$$

è possibile verificare che la soluzione effettiva delle [26.9] e [26.10] è costituita dalle relazioni:

$$\begin{cases} v'_A = v_B \\ v'_B = v_A \end{cases} \qquad [26.11]$$

in base alle quali possiamo affermare che:

in un urto elastico *unidimensionale* tra due corpi di *ugual massa*, le velocità dei corpi dopo l'urto risultano "scambiate" rispetto a quelle prima dell'urto.

Quando i due corpi che si urtano elasticamente non hanno la stessa massa (Fig. 26.11), o quando l'urto non è unidimensionale (Fig. 26.12), la determinazione delle velocità finali attraverso la soluzione del sistema di equazioni $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{0}$ e $\Delta T = 0$ è più complicata. È però possibile, scegliendo un opportuno sistema di riferimento chiamato *sistema di riferimento del centro di massa* trattare ogni tipo di urto elastico in modo assai semplice. Dimostreremo infatti che, in questo particolare sistema di riferimento, i corpi che si urtano elasticamente hanno, dopo l'urto, velocità uguali in modulo e direzione, ma opposte in verso rispetto a quelle prima dell'urto.

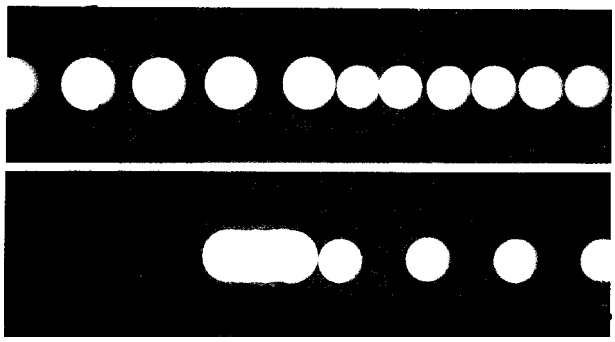

Fig. 26.11. In figura è rappresentato un urto elastico unidimensionale tra due corpi di massa diversa. Dopo l'urto le velocità dei due corpi sono entrambe modificate rispetto a quelle iniziali.

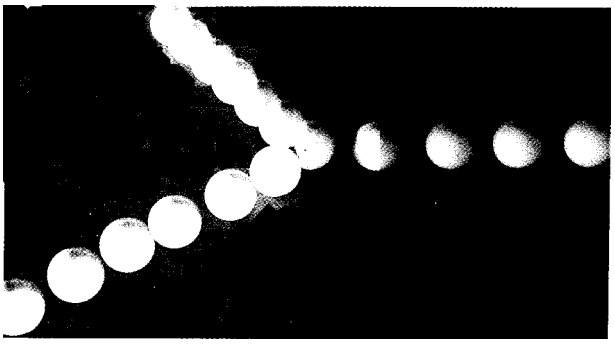

Fig. 26.12. L'urto in figura è tra due biglie aventi la stesso massa. Prima dell'urto uno delle due biglie è ferma, dopo l'urto si muovono perpendicolarmente l'una all'altra.

Quesiti

26.1. Un elettrone urta elasticamente un atomo di idrogeno inizialmente fermo. Il moto prima e dopo l'urto avviene sulla stessa retta. Quale frazione dell'energia cinetica iniziale dell'elettrone è trasferita all'atomo di idrogeno? La massa dell'atomo di idrogeno è 1836 volte la massa dell'elettrone.
[R. 0.22%].

26.2. Classificazione degli urti

Urti piani tra due corpi sferici (particelle):
- In un urto bidimensionale (piano) la seconda particella può sempre considerarsi ferma, se non lo è conviene mettersi su un sistema di riferimento in cui lo diventa.
- Dicesi *parametro d'urto b* la distanza tra la traiettoria rettilinea iniziale del corpo urtante e una retta parallela ad essa e passante per il centro di massa del secondo corpo; essa è una misura del fatto che l'urto avvenga in modo più o meno diretto e se $b = 0$ l'urto viene detto *centrale diretto* (o *frontale*), (cioè il vettore velocità del corpo urtante passa per il c.m. dell'altro corpo) e il moto dei due corpi si svolge sempre lungo una linea.

Urto perfettamente elastico unidimensionale (centrale diretto):
Per determinare le condizioni finali dei due corpi è sufficiente applicare i principi della conservazione della q.d.m. e dell'energia cinetica. Perché?
Caso generale: Dette m_1 e m_2 le masse, e v_1 , v_2 , v_1' , v_2' le rispettive velocità prima e dopo l'urto, verificare, applicando i principi di conservazione che:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$
$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \qquad [26.12]$$

Casi particolari interessanti da analizzare tramite le relazioni [26.12] sono:
(*a*) $m_1 = m_2$;
(*b*) $m_1 = m_2$ e $v_2 = 0$;
(*c*) $v_2 = 0$ e $m_2 >> m_1$ (m_2 molto maggiore di m_1);
(*d*) $v_2 = 0$ e $m_2 << m_1$.

Urto perfettamente elastico centrale obliquo:
Per determinare le condizioni finali dei due corpi *non è sufficiente* applicare la conservazione della q.d.m. e dell'energia cinetica, occorrono altre informazioni riguardanti lo stato finale, ad esempio l'angolo di diffusione di una delle due particelle. Perché?
Osservazione: Per due corpi di massa uguale, in un urto elastico e non centrale, la somma dei due angoli di deflessione è sempre 90°.

Urto completamente anelastico in due dimensioni e unidimensionale:
Per determinare le condizioni finali dei due corpi è sufficiente applicare il principio della conservazione della q.d.m. Perché?

Urto anelastico unidimensionale:
Non si conserva l'energia cinetica, ma solo la q.d.m. totale; per determinare le condizioni finali dei due corpi occorre conoscere la quantità di energia cinetica che si trasforma.

Quesiti

26.2. Una sfera viene lanciata con una velocità di 100 m/s. Urta contro un'altra sfera identica in quiete e viene deviata di un angolo di 60°. In quale direzione rincula la sfera colpita e quale è la sua velocità, nell'ipotesi che l'urto sia perfettamente elastico?

26.3. Una molecola di gas con una velocità di 300 m/s urta elasticamente un'altra molecola ferma di uguale massa. Dopo l'urto la prima molecola si muove con un angolo di 30° rispetto alla direzione iniziale. Trovare la velocità delle due molecole e l'angolo formato con la direzione di incidenza dalla traiettoria della molecola urtata.

26.4. Due pattinatori, un uomo e una donna, si scontrano e si abbracciano come in Fig.A. Uno di massa m_1 =70 kg si sta muovendo inizialmente verso est con velocità v_1 = 6 km/h. L'altro di massa m_2 = 50 kg si muove inizialmente verso nord con v_2 = 8 km/h.

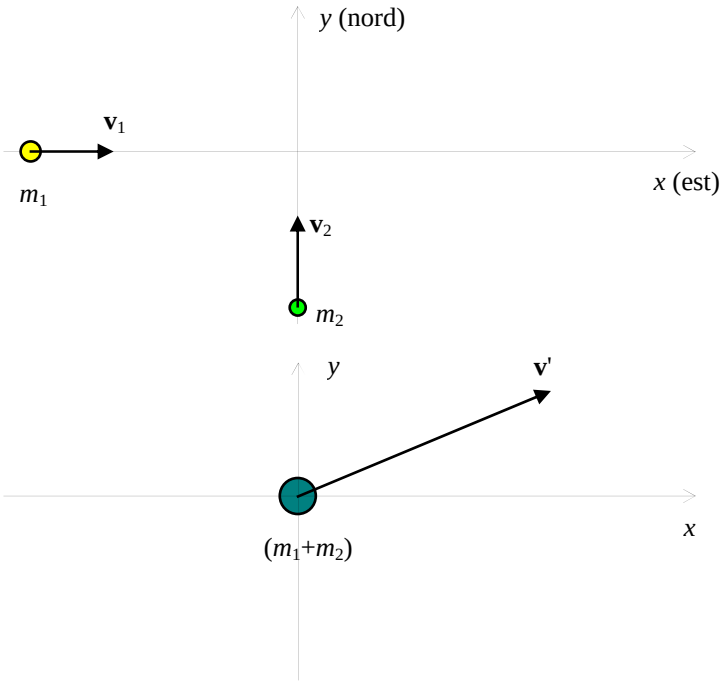

Fig. A

(*a*) Qual è la velocità finale della coppia? [R. v' = 4.9 km/h]

(*b*) Quale frazione dell'energia cinetica iniziale dei due pattinatori si perde nell'urto?

26.3. Centro di massa

26.3.1. Introduzione

Da quando è stato introdotto il concetto di sistema di corpi, sono stati fatti numerosi esempi di sistemi, più o meno reali o complicati. Tuttavia ogni volta che si sono utilizzati i risultati ottenuti o che si è voluto verificarne la correttezza, abbiamo scelto di trattare con sistemi costituiti da uno o due corpi, dotati per di più della caratteristica di poter essere considerati puntiformi. Questa scelta non è stata casuale: il comportamento dinamico di un sistema composto da più corpi può essere molto complicato da studiare e, addirittura, nella maggior parte dei casi è estremamente difficile studiare il comportamento delle singole parti di un unico corpo. Nella realtà non esistono corpi puntiformi, ma solo corpi estesi e, quindi a priori, non si saprebbe con quale vettore caratterizzarne la posizione (Fig 26.13). Esiste però in ogni sistema di corpi un punto speciale, chiamato *centro di massa*, il cui comportamento è estremamente semplice da descrivere, per quanto complicato possa essere il moto del sistema che stiamo considerando (Fig. 26.14)

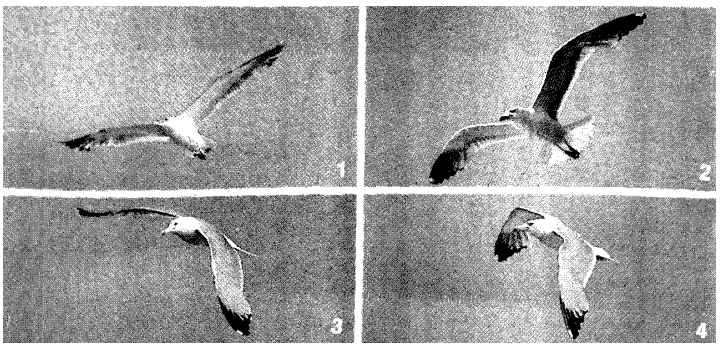

Fig. 26.13. Le singole parti del gabbiano si muovono in modo diverso l'una dall'altra. Descrivere e prevedere il moto di ognuna di esse è estremamente complicato.

Per definire esattamente cosa sia e dove si trovi il centro di massa di un corpo sono necessarie alcune considerazioni preliminari.

Possiamo infatti pensare ogni corpo esteso come formato dall'unione di un gran numero di costituenti puntiformi di massa m_i, ognuno ben individuabile con un vettore posizione $\mathbf{r}_i$.

Sin dalla scuola media si sa che il *centro di massa* (c.m.) di un sistema composta da due punti materiali P_1 e P_2 di massa m_1 e m_2 *è quel punto sul segmento* P_1P_2 che divide il segmento stesso in parti inversamente proporzionali alle masse.

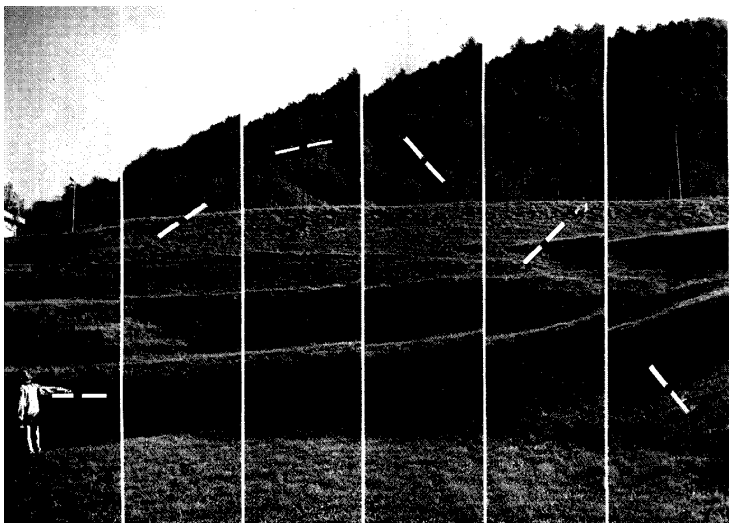

Fig. 26.14. Cronofotografia di un bastone in movimento. Anche se le singole parti del sistema in figura si muovono in modo complicato, il centro di massa segue una traiettoria assai semplice da descrivere: esso si muove infatti descrivendo una parabola.

<u>*Esercizio*</u>: Sapendo che il c.m. di un sistema di due punti materiali P_1 e P_2 di massa m_1 e m_2 è quel punto del segmento P_1P_2 che divide il segmento stesso in parti inversamente proporzionali alle masse, dimostrare che, fissato un sistema qualsiasi di ascisse sulla retta P_1P_2 (Fig. 26.15), l'ascissa del c.m. è data da:

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \qquad [26.13]$$

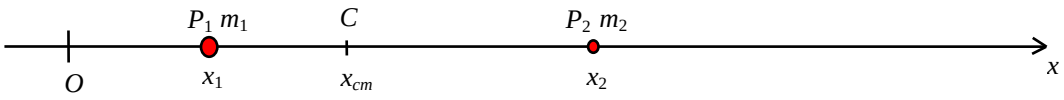

Fig. 26.15

Nel caso particolare in cui $m_1 = m_2$, C è il punto medio di P_1 e P_2.
Se abbiamo n particelle, m_1, m_2, ..., m_n , disposte in linea retta, il c.m. sarà dato da:

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_nx_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\sum_i m_ix_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_ix_i}{M} \qquad [26.14]$$

Per un sistema di n particelle nello spazio tridimensionale il c.m. avrà coordinate:

$$x_{cm} = \frac{\sum_i m_ix_i}{M} \qquad y_{cm} = \frac{\sum_i m_iy_i}{M} \qquad z_{cm} = \frac{\sum_i m_iz_i}{M} \qquad [26.15]$$

Nella notazione vettoriale ogni particella di massa m_i del sistema può essere descritta da un vettore posizione $\mathbf{r}_i$ in un sistema di riferimento ed il c.m. può essere rappresentato da un vettore posizione $\mathbf{r}_{cm}$:

se $$\mathbf{r}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k} \qquad [26.16]$$

si avrà $$\mathbf{r}_{cm} = x_{cm}\mathbf{i} + y_{cm}\mathbf{j} + z_{cm}\mathbf{k} \qquad [26.17]$$

Le tre equazioni scalari [26.15] possono quindi essere sostituite dall'unica equazione vettoriale:

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i\mathbf{r}_i}{M} \qquad [26.18]$$

dove la somma è vettoriale (vedi Fig. 26.16).

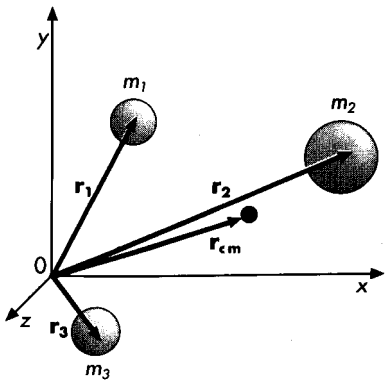

Fig. 26.16. Si può descrivere il sistema formato dai tre corpi di massa m_1, m_2, m_3 come se fosse formato da un'unica massa $M=m_1+m_2+m_3$ localizzata nel c.m.

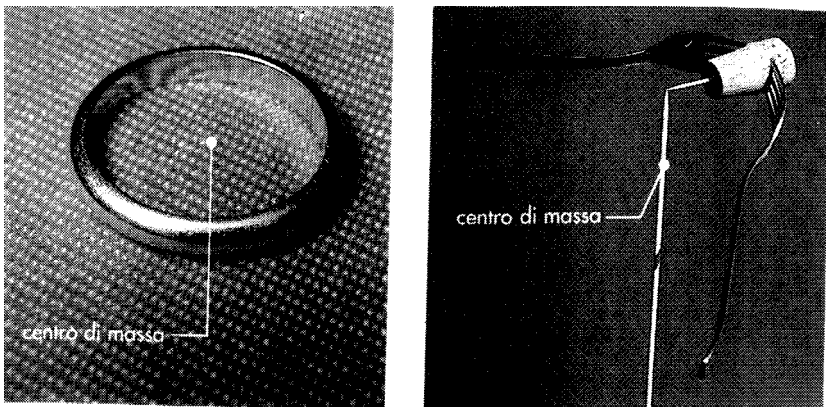

Fig. 26.17. Il centro di massa di un corpo non appartiene necessariamente al corpo.

Il centro di massa di un corpo non appartiene necessariamente al corpo. Per esempio il centro di massa degli oggetti di Fig. 26.17 è esterno ad essi.

Quesiti

26.5. Individua il c.m. di tre particelle di massa rispettivamente m_1 =1.0 kg, m_2 = 2.0 kg, m_3 = 3.0 kg, poste nei vertici di un triangolo equilatero di 1.0 m di lato.

26.3.2. Moto del centro di massa

Possiamo ora discutere l'importante significato fisico del c.m. Si consideri il moto di un sistema di particelle di massa m_1 ,m_2 ,...,m_n e di massa totale M. Supporremo ora che non vi siano masse che entrino o escano dal sistema in modo che la massa totale M resti costante nel tempo.
Dall'eq. [26.18] abbiamo:

$$M\mathbf{r}_{cm} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \qquad [26.19]$$

dove $\mathbf{r}_{cm}$ è il vettore posizione che identifica il c.m. in un qualsiasi sistema di riferimento.
Ancora, relativamente ad un intervallo di tempo Δt:

$$M\Delta\mathbf{r}_{cm} = \sum_i m_i \Delta\mathbf{r}_i \ . \qquad [26.20]$$

Dividendo per $\Delta t \to 0$ entrambi i membri:

$$\frac{M\Delta\mathbf{r}_{cm}}{\Delta t} = \frac{\sum_i m_i \Delta\mathbf{r}_i}{\Delta t} \qquad [26.21]$$

si ottiene:

$$M\mathbf{v}_{cm} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \qquad [26.22]$$

cioè:

$$\mathbf{p}_{cm} = \sum_i \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{tot} \qquad [26.23]$$

in base alla quale possiamo affermare che la quantità di moto del centro di massa di un sistema di massa M in moto con velocità $\mathbf{v}_{cm}$ è uguale alla quantità di moto totale del sistema.
Ancora, relativamente ad un intervallo di tempo Δt:

$$M\Delta\mathbf{v}_{cm} = \sum_i m_i \Delta\mathbf{v}_i \qquad [26.24]$$

dividendo per $\Delta t \to 0$ entrambi i membri:

$$\frac{M\Delta\mathbf{v}_{cm}}{\Delta t} = \frac{\sum_i m_i \Delta\mathbf{v}_i}{\Delta t} \qquad [26.25]$$

si ottiene:

$$M\mathbf{a}_{cm} = \sum_i m_i \mathbf{a}_i \ . \qquad [26.26]$$

Per cui dalla 2ª legge di Newton:

$$M\mathbf{a}_{cm} = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + ... + \mathbf{F}_n \ . \qquad [26.27]$$

Quindi *il prodotto della massa totale del sistema di particelle per l'accelerazione del c.m. è uguale alla somma vettoriale di tutte le forze che agiscono sul sistema di particelle.*

Fra tutte queste forze vi saranno delle forze interne, che le particelle esercitano le une sulle altre. Tuttavia, per la 3ª legge di Newton la risultante delle forze interne è zero e quindi le forze interne possono non essere prese in considerazione. La somma che appare nella [26.27] tiene conto soltanto delle forze esterne agenti su tutte le particelle.
Riscriviamo allora l'equazione [26.27] così:

$$M\mathbf{a}_{cm} = \sum_j \mathbf{F}_{est,j} = \mathbf{F}_{est,ris} \qquad \textit{(Legge di Newton generalizzata)} \qquad [26.28]$$

Questa equazione dice che:

il c.m. di un sistema di particelle si muove come se tutta la massa del sistema fosse concentrata nel c.m. e tutte le forze esterne fossero applicate in quel punto.

Si noti che questo semplice risultato è stato ottenuto senza specificare la natura del sistema di particelle. Questo può essere un corpo rigido, le cui particelle occupano posizioni fisse le une rispetto alle altre, o essere un agglomerato di particelle in cui può avvenire un qualsiasi moto interno.

Se il sistema di particelle è isolato, dalla [26.28] si ricava che $\mathbf{a}_{cm} = \mathbf{0}$, cioè *il c.m. di un sistema isolato o si muove di moto rettilineo uniforme o sta fermo* (Figg. 26.18 e 26.19).

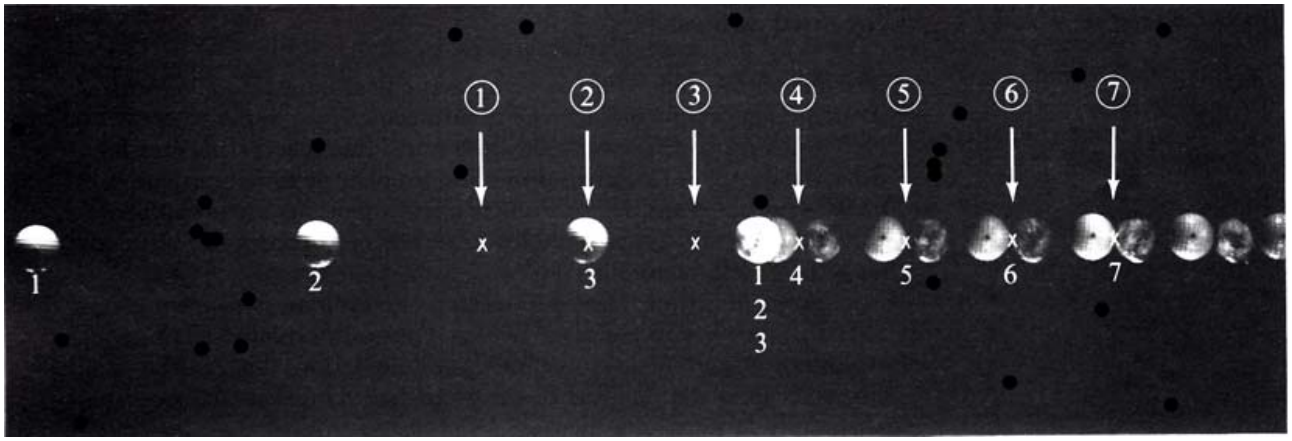

Fig. 26.18. L'urto della Fig. 24.11 a pag. 286, con le posizioni del centro di massa segnate con × e indicate dai numeri nei circoletti, con frecce in corrispondenza delle posizioni numerate delle due palle nell'istante di ciascun lampo. Poiché la palla di stucco non si muove durante i primi tre lampi, essa è indicata nello stesso punto per i lampi 1, 2 e 3. Il centro di massa si localizza con la relazione [26.13], usando i dati forniti nel testo. Possiamo vedere che il centro di massa si muove alla stessa velocità costante prima dell'urto e dopo l'urto.

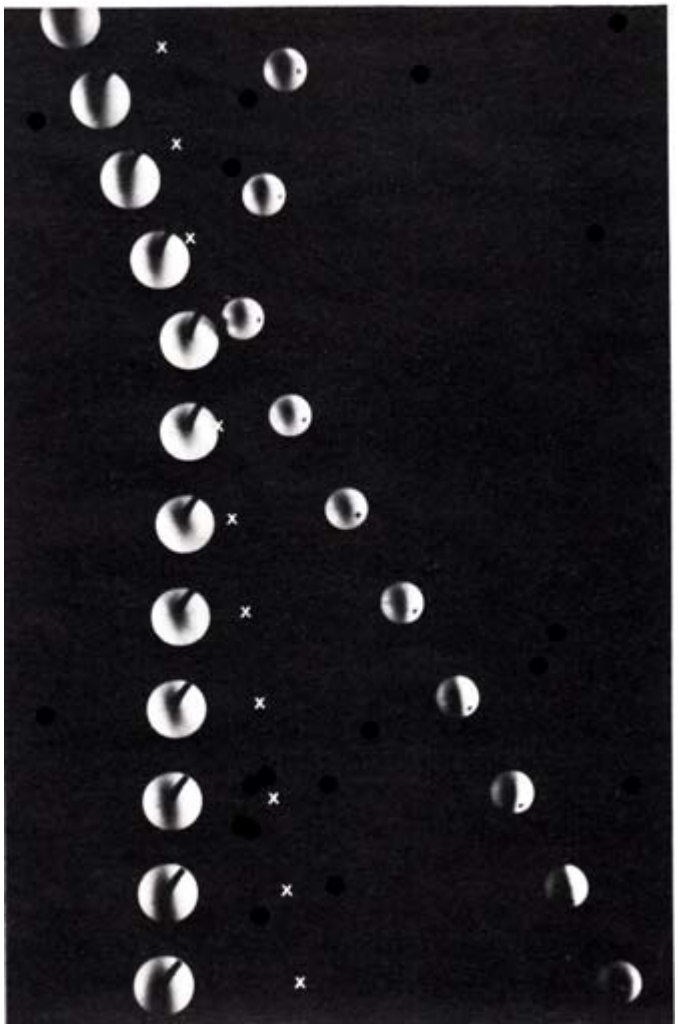

Fig. 26.19. L'urto della Fig. 24.9 a pag. 285 , in cui è rappresentata la posizione del centro di massa, marcata con ×, nell'istante di ciascun lampo. Il rapporto tra le masse delle due palle è circa 7/3 e quindi le distanze fra ciascuna palla e il centro di massa stanno nel rapporto 3 a 7. Anche in questo caso il centro di massa si muove a velocità costante, senza venire perturbato dall'urto.

Dalla [26.23] si può dedurre che la q.d.m. di un sistema di particelle è quella che avrebbe il c.m. considerato come punto materiale in cui è concentrata tutta la massa del sistema.

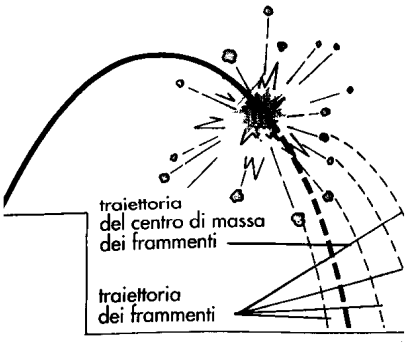

Fig. 26.20. Quando un proiettile esplode in aria, i singoli frammenti ricadono a terra percorrendo traiettorie diverse. Il centro di massa invece, descrive la traiettoria che avrebbe percorso il proiettile in caduta libera.

Esempio: traiettoria di un proiettile (fuoco artificiale) che esplode in aria (Fig.26.20).
Durante l'esplosione si originano solo forze interne che non possono far variare la traiettoria del c.m.

Esercizio svolto: Dimostrare che *nel sistema di riferimento solidale con il c.m. la quantità di moto totale di un sistema isolato (per esempio durante un urto) è sempre uguale a zero.*
Dimostrazione: Nel caso di due corpi m_1 e m_2 , in un sistema inerziale qualsiasi S la q.d.m. totale è data da::

$$\mathbf{p}_{tot} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 , \qquad [26.29]$$

mentre nel sistema solidale con il c.m. S^* la q.d.m. totale per gli stessi due corpi è:

$$\mathbf{p}^*_{tot} = m_1\mathbf{v}^*_1 + m_2\mathbf{v}^*_2 . \qquad [26.30]$$

Utilizzando le trasformazioni di Galilei $\mathbf{v}^* = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{cm}$ e la [26.23] si ottiene infine:

$$\mathbf{p}^*_{tot} = m_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{cm}) + m_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{cm}) = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 - (m_1 + m_2)\mathbf{v}_{cm} = \mathbf{0} \qquad [26.31]$$

essendo $m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$ la q.d.m. totale e $(m_1 + m_2)\mathbf{v}_{cm}$ la q.d.m. del centro di massa.

26.3.3. Un'astuzia per trattare gli urti: il sistema di riferimento del c.m.

Consideriamo l'urto elastico centrale rappresentato in Fig. 26.21(*a*) dove due corpi, di masse m_1 e m_2, procedono l'uno verso l'altro con velocità $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Una simile descrizione sottintende che i due corpi vengano osservati in un sistema di riferimento rispetto al quale essi risultino muoversi con velocità $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Se scegliamo però un diverso sistema di riferimento, la cui origine si muova con il centro di massa del sistema (Fig. 26.21(*b*)), l'analisi dell'urto si semplifica notevolmente. Infatti, essendo il sistema isolato, il suo centro di massa si muove di m.r.u., il che garantisce che il sistema di riferimento del centro di massa sia un sistema di riferimento inerziale.

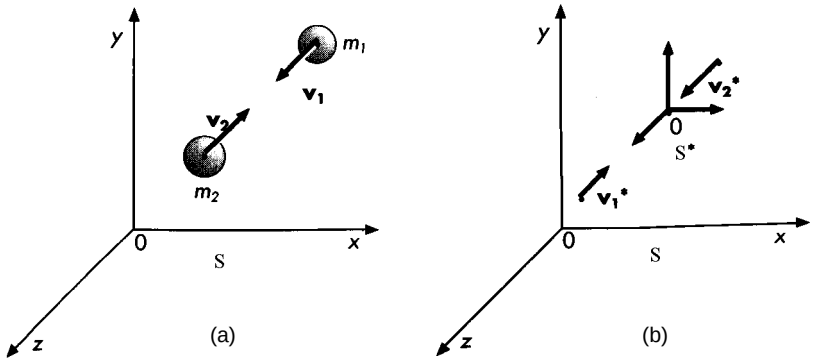

Fig. 26.21. Urto elastico tra due corpi di massa m_1 e m_2, che procedono l'uno verso l'altro con velocità $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ rispetto, a *S*. La situazione è descritta dal sistema di riferimento *S*, evidenziato in (*a*). In (*b*) è rappresentato lo stesso urto elastico, visto però dal sistema di riferimento *S** del centro di massa. Rispetto a *S** la velocità del centro di massa è ovviamente nulla, mentre i due corpi che collidono risultano avere velocità $\mathbf{v}_1^*$ e $\mathbf{v}_2^*$.

Le equazioni

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1^* = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{cm} \\ \mathbf{v}_2^* = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{cm} \end{cases} \qquad [26.32]$$

permettono di trasformare le velocità $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ espresse nel sistema di riferimento originario *S* in quelle $\mathbf{v}_1^*$ e $\mathbf{v}_2^*$ espresse nel sistema di riferimento *S** del centro di massa.

Poiché in *S** il centro di massa è fermo, la sua quantità di moto è ovviamente nulla, di conseguenza, in base alla [26.23], tale dovrà essere anche la quantità di moto complessiva del sistema.

Potremo allora scrivere, dato che nel sistema di riferimento del centro di massa si conserva la quantità di moto complessiva:

$$\mathbf{p}_1^{*\prime} + \mathbf{p}_2^{*\prime} = \mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^* = \mathbf{0} \qquad [26.33]$$

da cui

$$\mathbf{p}_2^{*\prime} = -\mathbf{p}_1^{*\prime} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{p}_2^* = -\mathbf{p}_1^* \qquad [26.34]$$

Se l'urto è elastico, dovrà conservarsi anche l'energia cinetica. Si dovrà cioè avere che:

$$T^{*\prime} = T^* \qquad \text{ossia} \qquad \frac{\left(p_1^{*\prime}\right)^2}{2m_1} + \frac{\left(p_2^{*\prime}\right)^2}{2m_2} = \frac{\left(p_1^*\right)^2}{2m_1} + \frac{\left(p_2^*\right)^2}{2m_2} \qquad [26.35]$$

che utilizzando le [23.34], può essere scritta come:

$$\left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right)\left(p_1^{*\prime}\right)^2 = \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right)\left(p_1^*\right)^2 \qquad [26.36]$$

da cui

$$\left(p_1^{*\prime}\right)^2 = \left(p_1^*\right)^2 \qquad [26.37]$$

che, risolta, fornisce le soluzioni:

$$\mathbf{p}_1^{*\prime} = \pm\mathbf{p}_1^* \qquad [26.38]$$

e,

$$\mathbf{p}_2^{*\prime} = \pm\mathbf{p}_2^* \qquad [26.39]$$

La soluzione significativa è:

$$\mathbf{p}_1^{*\prime} = -\mathbf{p}_1^* \quad , \quad \mathbf{p}_2^{*\prime} = -\mathbf{p}_2^* \qquad [26.40]$$

che implica:

$$\mathbf{v}_1^{*\prime} = -\mathbf{v}_1^* \quad , \quad \mathbf{v}_2^{*\prime} = -\mathbf{v}_2^* \qquad [26.41]$$

Nel sistema del centro di massa le velocità dei corpi dopo un urto elastico sono uguali e opposte a quelle prima dell'urto, anche se le masse sono diverse.

Questo risultato permette di risolvere in modo molto semplice il problema della determinazione delle velocità finali di un sistema di corpi dopo un urto elastico. Infatti, una volta trovate le velocità finali nel sistema di riferimento del centro di massa, è possibile risalire a quelle nel sistema di riferimento originario, riutilizzando le inverse delle trasformazioni [26.32]:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1^{*\prime} + \mathbf{v}_{cm} \;\Rightarrow\; \mathbf{v}_1' = -\mathbf{v}_1^{*} + \mathbf{v}_{cm} \;\Rightarrow\; \mathbf{v}_1' = -\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_{cm} \\ \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2^{*\prime} + \mathbf{v}_{cm} \;\Rightarrow\; \mathbf{v}_2' = -\mathbf{v}_2^{*} + \mathbf{v}_{cm} \;\Rightarrow\; \mathbf{v}_2' = -\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_{cm} \end{cases} \qquad [26.42]$$

Esempio:

Due corpi, di massa m_1 =7 kg e m_2 =3 kg, in moto l'uno verso l'altro con velocità $\mathbf{v}_1$ = (12.0 m/s)**i** e $\mathbf{v}_2$ = –(4.0 m/s)**i** rispetto all'asse delle ascisse, si urtano elasticamente. Si vogliono determinare le velocità dei due corpi dopo l'urto (Fig. 26.22).

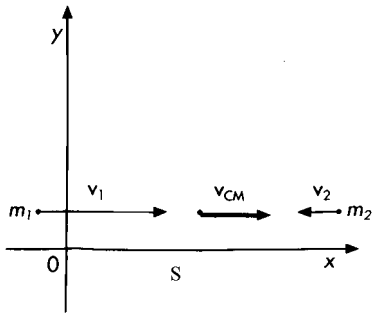

Fig. 26.22.

Nel sistema di riferimento dato, la quantità di moto complessiva del sistema è data da

$$\mathbf{p}_{tot} = (72\ \text{kg·m/s})\mathbf{i}$$

Poiché $\mathbf{p}_{tot} = m\mathbf{v}_{cm}$ la velocità del centro di massa risulterà espressa da:

$$\mathbf{v}_{cm} = \frac{\mathbf{p}_{tot}}{m} = (7.2\ \text{m/s})\mathbf{i}$$

Nel sistema di riferimento del centro di massa le velocità del centro di massa e dei due corpi prima dell'urto, risulteranno espresse da:

$\mathbf{v}_{cm}^* = \mathbf{0}$ $\quad \mathbf{v}_1^* = (12.0 - 7.2)\ \text{m/s}\ \mathbf{i}$ $\quad \mathbf{v}_2^* = (-4.0 - 7.2)\ \text{m/s}\ \mathbf{i}$

ossia

$\mathbf{v}_{cm}^* = \mathbf{0}$ $\quad \mathbf{v}_1^* = (4.8\ \text{m/s})\mathbf{i}$ $\quad \mathbf{v}_2^* = -(11.2\ \text{m/s})\ \mathbf{i}$

È facile controllare che. in accordo con quanto abbiamo dimostrato, nel sistema di riferimento del centro di massa la quantità di moto complessiva del sistema è nulla. Si ha infatti che:

$\mathbf{p}^*_{tot} = (7\times4.8 - 3\times11.2)\ \text{kg·m/s}\ \mathbf{i} = (33.6 - 33.6)\ \text{kg·m/s}\ \mathbf{i} = (0\ \text{kg·m/s})\ \mathbf{i}$.

Dopo l'urto, le velocità dei corpi saranno, in base alle [26.41]

$\mathbf{v}_1^{*\prime} = -\mathbf{v}_1^* = -(4.8\ \text{m/s})\mathbf{i}$

$\mathbf{v}_2^{*\prime} = -\mathbf{v}_2^* = (11.2\ \text{m/s})\mathbf{i}$

che, attraverso le [26.42], forniscono la soluzione richiesta nel sistema di riferimento originario. Si avrà infatti che

$\mathbf{v}_1' = (-4.8 + 7.2)\ \text{m/s}\ \mathbf{i}$ $\quad \mathbf{v}_1' = (2.4\ \text{m/s})\mathbf{i}$

$\mathbf{v}_2' = (11.2 + 7.2)\ \text{m/s}\ \mathbf{i}$ $\quad \mathbf{v}_2' = (18.4\ \text{m/s})\mathbf{i}$.

Anche se nell'esempio è stato preso in considerazione un urto elastico unidimensionale, il tipo di procedimento utilizzato è valido per urti in qualsiasi dimensione. In questi casi è però necessario avere altre informazioni sulle condizioni iniziali. In particolare è necessario conoscere, nell'istante dell'urto, la distanza tra il centro di massa di uno dei due corpi e la retta che contiene il vettore velocità con cui si muove l'altro corpo.

Problemi di fine capitolo

26.6. È stato dimostrato attraverso esperimenti sulla diffrazione degli elettroni che la distanza tra i centri dell'atomo di ossigeno (O) e dell'atomo di carbonio (C) nelle molecole di monossido di carbonio allo stato gassoso, è 1.130×10^{-10} m. Indicate la posizione del centro di massa di una molecola di CO rispetto all'atomo di carbonio.

26.7. La massa della Terra è 6.0×10^{24} kg, quella del Sole è di 2.0×10^{30} kg, mentre la loro distanza media vale 1.5×10^{11} m. Quanto è vicino al Sole il centro di massa del sistema Terra-Sole? Quanto vale il rapporto tra questa distanza e la distanza Terra-Sole?

26.8. La massa della Luna è circa 0.013 volte la massa della Terra e la distanza tra il centro della Luna e il centro della Terra è circa 60 volte il raggio della Terra. Qual è la distanza tra il centro di massa del sistema Terra-Luna e il centro della Terra? Il raggio della Terra è 6400 km circa. [R.4900 km]

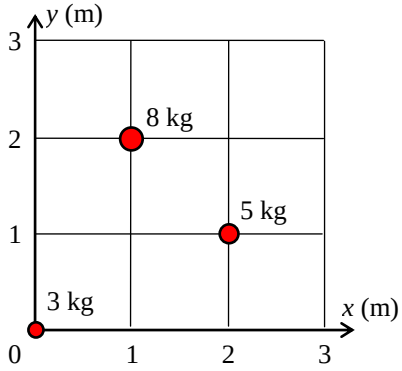

Fig. B

26.9. Dove si trova il c.m. delle tre particelle mostrate in Fig. B?

26.10. Consideriamo due blocchi di massa m_A e m_B, uniti da una molla a riposo su un tavolo orizzontale privo di attrito. Allontaniamo i due blocchi tendendo la molla, e poi li lasciamo liberi. Descrivete il moto a parole, senza formule. Qual è il moto del c.m. del sistema?

26.11. Due blocchi di massa 1.0 kg e 3.0 kg collegati da una molla sono in quiete su un piano orizzontale senza attrito. Se ai due blocchi vengono impresse due velocità in modo da far muovere il primo a 1.7 m/s verso il centro di massa che resta fermo, qual è la velocità del secondo?
[R. 0.57 m/s verso il centro di massa].

26.12. Due masse puntiformi *P* e *Q* sono inizialmente in quiete alla distanza di 1.0 m. *P* ha una massa di 0.10 kg e *Q* una massa di 0.30 kg. *P* e *Q* si attraggono con una forza costante di 1.0×10^{-2} N. Sul sistema non agiscono forze esterne. (*a*) Descrivere il moto del centro di massa. (*b*) A quale distanza dalla posizione iniziale di *P* le due particelle collidono?

26.13. Due corpi di massa $m_A = 1$ kg e $v_A = 10$ m/s, $m_B = 2$ kg e $v_B = 4$ m/s si muovono sulla stessa traiettoria rettilinea e nello stesso verso, rispetto ad un osservatore fermo: determinare la q.d.m. totale del sistema prima dell'urto e dopo l'urto rispetto all'osservatore fermo. Determinare poi le velocità dei due corpi rispetto ad un osservatore solidale con il c.m. e verificare che la quantità di moto totale rispetto a questo osservatore è zero. Quale sarà la velocità dei due corpi dopo l'urto?