27. PRINCIPI DI CONSERVAZIONE – ENERGIA

27.1. Il metodo SCN (*sommatoria ciclica nulla*)

♦ **Regolamento viaggi**: supponiamo che in un ipotetico Paese sia in vigore una legge che regolamenta i viaggi dei suoi cittadini nel modo seguente: “*i viaggi sono sempre un misto di turismo e di lavoro, combinati in modo tale che, al termine di ciascun viaggio ciclico, il viaggiatore abbia conservato intatto il proprio patrimonio di denaro*”.
In altri termini ciò significa che il viaggiatore lavora durante alcuni tratti del viaggio, per procurarsi il denaro necessario per fare il turista nei tratti rimanenti. Può accadere che in alcuni tratti del suo percorso egli si trovi in credito (o in debito) avendo lavorato di più (o di meno) rispetto al costo della sua attività di turista svolta fino a quel momento; al termine di ogni viaggio “ciclico” egli ha però pareggiato il conto e si ritrova quindi con il medesimo denaro che possedeva all’inizio.

♦ **Il regolamento comporta**:

[27.3] $$\sum_{A\,(ciclo)}^{A} \Delta G = 0$$ 1

la somma del denaro ricevuto dal viaggiatore durante un qualsiasi viaggio ciclico, è nulla.

ove la somma (rappresentata dalla lettera maiuscola Σ sigma) si intende estesa ad un qualunque viaggio ciclico che, a partire da una città “*A*”, riporta il viaggiatore alla stessa città.

Nella [27.3] si immagina di suddividere il viaggio (Fig. 27.1) in tratti “elementari” di viaggio: ΔG rappresenta il denaro che il viaggiatore riceve nel tratto elementare generico. La freccia di figura sta a rappresentare la convenzione in base alla quale ΔG è da intendersi *positivo* quando corrisponde a denaro effettivamente ricevuto dal viaggiatore (per il lavoro che ha svolto), *negativo* quando invece si tratta di denaro speso dal viaggiatore (per fare il turista).

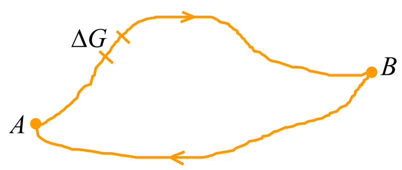

Fig. 27.1.

A questo punto, facendo riferimento alla Fig.27.2 mettiamo a confronto due possibili viaggi che conducono per vie diverse (“*a*” e “*b*”) da una data città *A* alla medesima città *B*. Se ad entrambi i percorsi “*a*” e “*b*” associamo un medesimo ritorno “*c*” da *B* ad *A*, veniamo ad evidenziare due viaggi ciclici (*AaBcA* e *AbBcA*) per ciascuno dei quali è valida la [27.3] che possiamo scrivere nella forma:

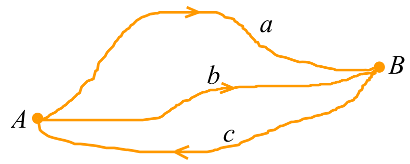

Fig. 27.2.

[27.4] $$\sum_{A\,(a)}^{B} \Delta G + \sum_{B\,(c)}^{A} \Delta G = 0$$ 2

il denaro ricevuto nel tratto AaB aggiunto al denaro ricevuto nel tratto BcA dà una somma complessiva nulla

[27.5] $$\sum_{A\,(b)}^{B} \Delta G + \sum_{B\,(c)}^{A} \Delta G = 0$$ 3

il denaro ricevuto nel tratto AbB aggiunto al denaro ricevuto nel tratto BcA dà una somma complessiva nulla

Confrontando la [27.4] e la [27.5] si ha

[27.6] $$\sum_{A\,(a)}^{B} \Delta G = \sum_{A\,(b)}^{B} \Delta G = \ldots = invariante$$ 4

Quindi il denaro ricevuto durante un viaggio aperto è “***invariante***” rispetto al percorso, a parità di estremi del percorso stesso.

Viceversa è facile dimostrare che la validità della [27.6] comporta la validità della [27.3]; basta effettuare il ragionamento a ritroso:

$$4 \Longrightarrow 3 + 2 \Longrightarrow 1$$

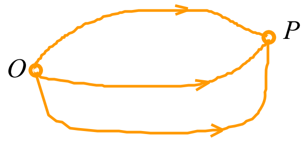

Fig. 27.3.

L'invarianza messa in evidenza ci permette di definire (Fig. 27.3) in un punto generico P (ossia in una città generica) una grandezza U, dopo avere scelto arbitrariamente un altro punto O (città) come "*origine*". La definizione è la seguente:

[27.7] $$U(P) = \sum_{O}^{P} \Delta G \quad ^{(*)}$$

la funzione U(P) in un generico punto P è il denaro dato complessivamente al viaggiatore che da O si porti in P lungo un percorso qualsiasi. A tale funzione possiamo dare un nome qualsiasi, ad esempio "livello" di P.

Per la [27.4] si può scrivere (Fig. 27.4):

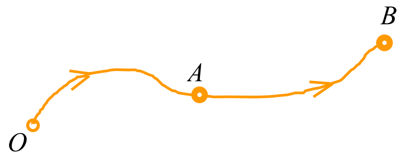

Fig. 27.4.

[27.8] $$U(B) = \sum_{O}^{B} \Delta G = \sum_{O}^{A} \Delta G + \sum_{A}^{B} \Delta G = U(A) + \sum_{A}^{B} \Delta G$$

da cui

[27.9] $$\sum_{A}^{B} \Delta G = U(B) - U(A)$$

il denaro complessivamente dato al viaggiatore che si sposta da A a B lungo un percorso qualsiasi, è uguale all'incremento di livello U fra il punto iniziale A e quello finale B.

Il ragionamento appena svolto non è legato al significato particolare attribuito ai vari termini. Non ha dunque alcuna rilevanza il fatto che nella [27.3] la grandezza ΔG rappresenti denaro ricevuto o qualcosa di completamente diverso, e, analogamente, che alla parola *ciclo* si attribuisca il significato di percorso geometrico chiuso o di qualcosa di diverso (per esempio, di trasformazione ciclica).
Tuttavia ogni qualvolta vale la [27.3] o la [27.6], indipendentemente dal significato dei simboli, scattano sempre due conseguenze:

- la possibilità di definire una grandezza U in base alla [27.7];
- la validità della [27.9].

Elenchiamo alcuni casi ai quali si applica immediatamente il *ragionamento-tipo* appena illustrato:

(*a*) *Forze conservative*: *ciclo* sta per linea geometrica chiusa; G è il *lavoro* della forza (cambiato di segno); U è l'*energia potenziale*: *gravitazionale* per le forze gravitazionali (costanti e non), *elastica* per le forze elastiche, *elettrica* per le forze elettriche.

(*b*) *Gravitazione - campo gravitazionale*: ciclo sta per linea geometrica chiusa; G è l'integrale di linea del campo gravitazionale (cambiato di segno); U è il potenziale gravitazionale.

(*c*) *Elettromagnetismo - campo elettrico*: ciclo sta per linea geometrica chiusa; G è l'integrale di linea del campo elettrico (cambiato di segno); U è il potenziale elettrico.

(*d*) *Termodinamica - primo principio*: ciclo sta per trasformazione di stato ciclica; G è la differenza fra il calore fornito al sistema e il lavoro che si ottiene; U è l'energia interna del sistema stesso.

(*e*) *Termodinamica - secondo principio*: ciclo sta per trasformazione ciclica reversibile; ΔG è il rapporto fra il calore elementare fornito e la temperatura a cui avviene lo scambio del calore stesso; U è l'entropia del sistema.

(*) Si noti che la funzione puntuale $U(P)$ è possibile definirla a meno di una costante.

27.2. Forze conservative

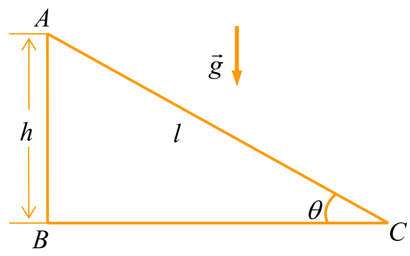

Fig. 27.5. Il campo gravitazionale viene supposto uniforme e quindi la forza gravitazionale non cambia (in intensità, direzione e verso) durante gli spostamenti *AC* e *AB*.

Cominciamo con il confrontare il lavoro compiuto dalla forza di gravità su un corpo di massa *m* che scivola dalla sommità di un piano inclinato alto *h*, con il lavoro compiuto dalla forza di gravità sullo stesso corpo quando questo è in caduta libera da un'altezza *h* (Fig. 27.5).

Lungo il tratto *AC* l'espressione del lavoro compiuto dalla forza di gravità è data da:

[27.10] $$L_{AC} = m\vec{g} \times \Delta\vec{r}_{AC} = mgl\cos\left(\pi/2 - \theta\right) = mglsen\theta\,,$$

dove l è la lunghezza del tratto AC mentre $\left(\pi/2 - \theta\right)$ è l'angolo tra le direzioni della forza di gravità e del vettore spostamento $\Delta\vec{r}_{AC}$.

Lungo il tratto *AB* l'espressione del lavoro compiuto dalla forza di gravità è data da:

[27.11] $$L_{AB} = m\vec{g} \times \Delta\vec{r}_{AB} = mgh\,.$$

Dato che $h = l\,\mathrm{sen}\theta$, si conclude che $L_{AB} = L_{AC}$. Cioè la forza di gravità compie lo stesso lavoro sia che il corpo scivoli sia che cada liberamente. Giungiamo così a questa prima conclusione:

il lavoro compiuto dalla forza di gravità per far passare un corpo da una quota ad un'altra è indipendente dal percorso che il corpo segue per passare da una all'altra.

Continuiamo il nostro ragionamento notando che, se si vuole spostare il corpo in questione lungo il tratto orizzontale *BC*, il lavoro compiuto dalla forza di gravità sarà nullo perché la forza di gravità è in ogni punto perpendicolare allo spostamento stesso ($L_{BC} = m\vec{g} \times \Delta\vec{r}_{BC} = 0$). Quindi nello spostare un oggetto, sia che si passi direttamente da *A* a *C* (lungo il tratto inclinato) sia che prima si raggiunga *B* (lungo la verticale) e poi *C* (lungo il tratto orizzontale), il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale è sempre lo stesso. Quest'ultima constatazione ci permette di concludere che:

il lavoro compiuto dalla forza di gravità nello spostare un corpo da un punto ad un altro è indipendente dal percorso seguito dal corpo.

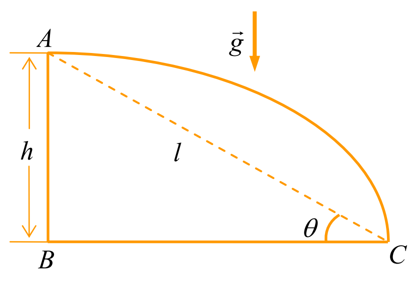

Fig. 27.6. Il tratto rettilineo *AC* della Fig. 27.5 viene sostituito con uno curvo.

Se il cammino seguito dal corpo per andare da *A* a *C* fosse stato curvilineo (Fig. 27.6) il lavoro compiuto dalla forza di gravità sarebbe stato sempre lo stesso. Infatti si può pensare di spezzettare il tratto curvilineo in tanti tratti orizzontali e verticali (tanti gradini, in generale, di diversa altezza e larghezza) cosicché il lavoro compiuto dalla forza di gravità sarà pari alla somma dei lavori lungo i singoli tratti orizzontali e verticali. Ma, per quanto esposto sopra, il lavoro compiuto dalla forza di gravità sarà pari a zero lungo i tratti orizzontali, e pari a $L_i = mg\Delta h_i$ lungo i tratti verticali (il pedice i si riferisce all'i-esimo tratto verticale di altezza Δh_i). Quindi il lavoro compiuto dalla forza di gravità sarà uguale a:

[27.12] $$L_{AC} = \sum_i L_i = \sum_i mg\Delta h_i = mg\sum_i \Delta h_i = mgh$$

dato che la somma di tutti i Δh_i è pari a h.

Tutte le forze che si comportano come la forza di gravità si dicono **forze conservative**. Diamo quindi una prima definizione generale di forza conservativa:

una forza si definisce conservativa quando il lavoro da essa compiuto per spostare un corpo da una posizione all'altra dipende solo dalle posizioni iniziale e finale e non dal particolare cammino seguito.

Del tutto equivalente alla definizione precedente è quella secondo cui

una forza si definisce conservativa quando è nullo il lavoro da essa compiuto per spostare un corpo lungo una qualsiasi traiettoria chiusa che termini cioè nel suo punto di partenza.

Per dimostrare l'equivalenza delle due definizioni consideriamo la traiettoria l che riporta il corpo nella posizione A come combinazione di due traiettorie l_1 (da A a B) e l_2 (da B a A) (Fig.27.7). Se la forza è conservativa, in base alla definizione di lavoro si avrà che:

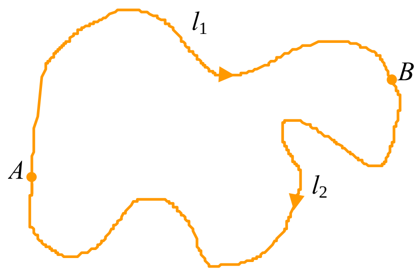

Fig. 27.7. La traiettoria l che riporta il corpo nella posizione di partenza, può essere pensata come la combinazione della traiettorie l_1 (da A a B) e l_2 (da B a A).

[27.13] $(L_{BA})_2 = -(L_{AB})_2$

mentre, in base alla prima definizione di forza conservativa si avrà che:

[27.14] $(L_{AB})_2 = (L_{AB})_1$

Poiché

[27.15] $L_{AA} = (L_{AB})_1 + (L_{BA})_2$

usando la [27.13] e la [27.14] si avrà che:

[27.16] $L_{AA} = (L_{AB})_1 - (L_{AB})_1 = 0$

e cioè quanto si voleva dimostrare.

Secondo una concezione più moderna della fisica (si veda il paragrafo 23.1 a pag. 269), sarebbe meglio parlare di **campo conservativo** piuttosto che di **forza conservativa**. Quindi, modificando leggermente gli enunciati precedenti, si dirà che:

un campo è conservativo quando il lavoro compiuto dalle forze del campo per spostare un corpo da una posizione all'altra dipende solo dalle posizioni iniziale e finale e non dal particolare cammino seguito

oppure, che:

un campo è conservativo quando è nullo il lavoro compiuto dalle forze del campo per spostare un corpo lungo una qualsiasi traiettoria chiusa.

Da quanto detto il **campo gravitazionale** è un campo conservativo, almeno in una zona dello spazio in cui $\vec{g}$ possa ritenersi uniforme. In generale però dobbiamo anche prendere in considerazione il caso in cui $\vec{g}$ non è uniforme.

Vogliamo ora dimostrare che il **campo elettrico** è un campo conservativo a tale scopo consideriamo due punti A e B nel campo di una carica puntiforme $+Q$ (Fig. 27.8). Immaginiamo che una carica di prova q si sposti dal punto A al punto B lungo due traiettorie diverse. Il cammino l_1 è una linea radiale, mentre il cammino l_2 è completamente arbitrario. Notiamo che i punti A e B non sono del tutto arbitrari, poiché entrambi si trovano sulla stessa linea radiale uscente da Q. Sebbene la nostra dimostrazione si applichi solo a questo caso particolare, essa illustra i principi generali che vi sono coinvolti.

Il percorso l_2 può essere approssimato da una linea spezzata costituita alternativamente da elementi di raggio ed elementi di arco. Poiché questi elementi possono essere arbitrariamente piccoli, la spezzata può essere arbitrariamente prossima al percorso effettivo. Nel percorso l_2 , il lavoro compiuto dalle forze del campo è diverso da zero soltanto lungo i segmenti radiali perché lungo gli archi il campo e, quindi, la forza sono perpendicolari agli spostamenti. In conclusione la somma dei lavori fatti lungo i segmenti radiali che costituiscono il percorso l_2 è uguale al lavoro fatto lungo il percorso l_1 perché la somma dei segmenti radiali di l_2 è uguale all'intero cammino radiale l_1. Inoltre dato che il cammino l_2 è del tutto arbitrario, abbiamo provato che il lavoro fatto è il medesimo per tutte le traiettorie che congiungono A e B e, quindi, che il campo elettrico è conservativo.

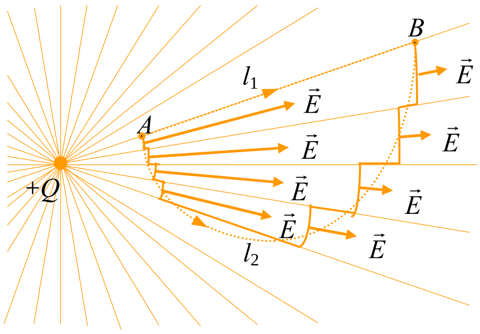

Fig. 27.8. Una carica di prova q si sposta da A a B nel campo della carica Q lungo i cammini l_1 e l_2. I segmenti frecciati mostrano il campo elettrico in otto punti del cammino l_2.

Questa dimostrazione *vale solo per il campo di una carica puntiforme*. Tuttavia, ogni distribuzione di carica (discreta o continua) può essere pensata costituita da un insieme di cariche elementari puntiformi e quindi, applicando il principio di sovrapposizione, possiamo concludere che il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrico per spostare una carica di prova dal punto A al punto B è indipendente dal cammino seguito, e cioè che il campo elettrico è conservativo.

Si può seguire un procedimento analogo al precedente per dimostrare che anche **il campo gravitazionale è in generale** (e non soltanto in prossimità della Terra) **conservativo**. Tale dimostrazione viene lasciata come esercizio.

27.3. Energia potenziale gravitazionale per $\vec{g}$ uniforme e conservazione dell'energia meccanica totale

Abbiamo visto nel paragrafo precedente cosa si intende in fisica per forza conservativa o, meglio, per campo conservativo, basando tutte le definizioni sul lavoro compiuto dalle forze del campo, senza però dire se esiste una grandezza fisica legata alla conservatività del campo. In questo paragrafo ci occuperemo di questo aspetto. Ancora una volta inizieremo con il considerare un caso molto semplice quello del campo gravitazionale uniforme.
Già vi sarete accorti che per una forza conservativa

[27.17] $$\sum_{A\,(linea\ chiusa)}^{A} \Delta L = 0 \qquad \text{o} \qquad \sum_{A(a)}^{B} \Delta L = \sum_{A(b)}^{B} \Delta L = \ldots = \textit{invariante rispetto al percorso}.$$

Per ragioni di semplicità occorrerà considerare (in riferimento alla grandezza ΔG della S.C.N.):

$$\Delta G = -\Delta L$$

per cui:

[27.18] $$\sum_{A\,(linea\ chiusa)}^{A} (-\Delta L) = 0 \qquad \text{o} \qquad \sum_{A(a)}^{B} (-\Delta L) = \sum_{A(b)}^{B} (-\Delta L) = \ldots = \textit{invariante rispetto al percorso}.$$

Questo ci permette, in base a quanto stabilito nel paragrafo 27.2, di definire in un punto generico del campo una grandezza U come funzione esclusivamente della posizione che il corpo di massa m occupa all'interno del campo, dopo aver scelto arbitrariamente (Fig 27.9) il livello di riferimento O (un qualsiasi piano orizzontale "origine"):

[27.19] $$U(P) = \sum_{O}^{P} (-\Delta L) \qquad \text{cioè}$$

[27.20] $$U(P) = \sum_{O}^{P} (-\Delta L) = -L_{OP} = L_{PO} = mgh_P$$

questa funzione viene chiamata **energia potenziale gravitazionale** (associata alla massa m posta in un punto P del campo gravitazionale terrestre uniforme).

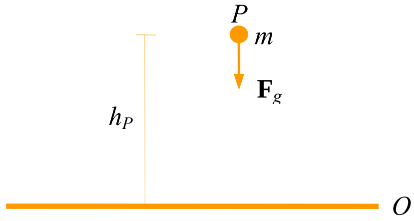

Fig. 27.9.

Ed inoltre la importante proprietà:

[27.21] $\sum_A^B(-\Delta L) = -L_{AB} = U(B) - U(A)$

da cui

[27.22] $L_{AB} = \sum_A^B \Delta L = U(A) - U(B) = -\Delta U$

il lavoro fatto dalla forza gravitazionale per spostare un corpo m da un punto A qualsiasi ad un punto B qualsiasi è uguale all'incremento, cambiato di segno, dell'energia potenziale del corpo.

Facendo riferimento alla Fig. 27.10) possiamo notare che, qualunque sia la posizione dei punti A e B, il lavoro fatto dalle forze del campo gravitazionale per spostare la massa m da A a B è dato da:

[27.23] $L_{AB} = U(A) - U(B) = mgh_A - mgh_B$.

A questo punto, per il teorema delle forze vive:

[27.24] $L_{AB} = \Delta T$

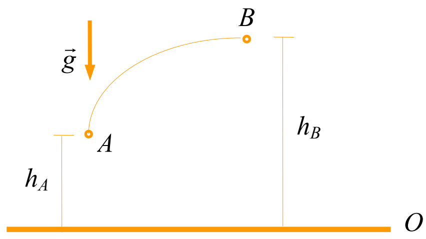

Fig. 27.10.

mentre per la [27.22] si ha:

[27.25] $L_{AB} = -\Delta U$

e quindi:

[27.26] $\Delta T = -\Delta U$

oppure

[27.27] $\Delta T + \Delta U = 0$

che possiamo così interpretare:

> **nel moto qualsiasi di un oggetto di massa *m, da un punto A ad un punto B,* si ha una variazione della sua energia cinetica che viene esattamente compensata dalla variazione della sua energia potenziale gravitazionale**

e cioè, se l'*energia cinetica* dell'oggetto va *diminuendo*, la sua *energia potenziale* va *aumentando* della stessa quantità, o viceversa. Il che equivale a dire che

[27.28] $T + U = costante$

Infatti con $\Delta T = T_B - T_A$ e $\Delta U = U_B - U_A$ la [27.27] diventa $T_B + U_B = T_A + U_A$ ovvero la [27.28]. Abbiamo così trovato ciò che ci eravamo proposti di trovare all'inizio del paragrafo e cioè *la grandezza fisica che si conserva* quando tutto cambia (posizione, velocità, energia cinetica, energia potenziale). Questa grandezza è l'**energia meccanica totale** e la indicheremo con E. Essa è definita come

[27.29] $E = T + U$

e ci consente di affermare che

> **in presenza di un campo gravitazionale uniforme (conservativo) e quindi in presenza delle sole forze gravitazionali non variabili (conservative) durante tutti i processi di trasformazione la variazione dell'energia meccanica totale è nulla ($\Delta E = 0$)**

cioè la [27.27], o, equivalentemente,

> **in presenza di un campo gravitazionale uniforme (conservativo) e quindi in presenza delle sole forze gravitazionali non variabili (conservative) l'energia meccanica totale si mantiene costante (si conserva) durante tutti i processi di trasformazione ($E = costante$)**

cioè la [27.28].

Concludiamo facendo alcune osservazioni su quanto detto in questo paragrafo.

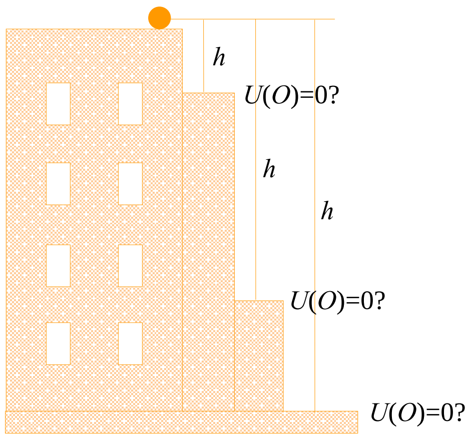

Fig. 27.11. Possiamo scegliere un'altezza qualsiasi per localizzare il punto zero dell'energia potenziale. La scelta è arbitraria e non fa alcuna differenza poiché abbiamo a che fare solo con variazioni di energia potenziale.

Prima osservazione: a riguardo dell'energia potenziale c'è da precisare che essa non può essere definita univocamente, infatti è sempre definita a meno di una costante additiva che dipende dalla scelta del sistema di riferimento (Fig. 27.11). Si noti che anche l'energia cinetica dipende dalla scelta del sistema di riferimento (paragrafo 25.3 a pag. 299) con la differenza che se due sistemi di riferimento non sono in moto relativo, ma sono semplicemente riferiti ad origini diverse, l'energia cinetica di un corpo in movimento prende lo stesso valore nei due sistemi.

Seconda osservazione: occorre capire che l'importanza e l'utilità della grandezza fisica $U = mgh$ derivano dal fatto che il campo di forze sul quale abbiamo ragionato è conservativo: questo permette di definire l'energia potenziale U come funzione esclusivamente della posizione che il corpo di massa m occupa all'interno del campo. Sarebbe del tutto privo di scopi, sia teorici che pratici, definire una grandezza il cui valore dipendesse dal cammino percorso dal corpo per arrivare ad una altezza h.

Terza osservazione: sebbene si parli comunemente di energia potenziale del corpo di massa m, si dovrebbe a rigore attribuire l'energia potenziale al sistema costituito dalla Terra e dal corpo (si pensi al significato di $\vec{g}$).

Quarta osservazione: ragionando in termini di energia (cinetica, potenziale, totale) possiamo *affiancare* alla descrizione dei fenomeni naturali data per via vettoriale (forze, velocità, accelerazioni, ecc.) una descrizione *complementare* (ma non alternativa) per via scalare con tutti i vantaggi del caso.

Quinta osservazione: con l'introduzione dei concetti di energia potenziale e di energia totale siamo ora in grado di capire meglio ciò che si intende quando si dice che *il lavoro non è una forma di energia* [(*)] bensì *è il nome del modo in cui l'energia meccanica viene trasferita ad un sistema o convertita da una forma all'altra*. Ovviamente, all'interno di un sistema isolato dove agiscono solo forze conservative, l'energia può solo essere convertita da una forma all'altra. Nell'esempio del sasso lanciato verso l'alto abbiamo che in salita l'energia si trasforma da cinetica a potenziale, mentre in discesa da potenziale a cinetica. E in questo caso, il lavoro fatto dalle forze gravitazionali (forze interne al *sistema sasso più Terra*) si può intendere, istante per istante, o uguale alla variazione dell'energia cinetica del sasso ($L = \Delta T$), o uguale alla variazione cambiata di segno dell'energia potenziale del sistema ($L = -\Delta U$). Se invece il sistema non è isolato, se ad esempio agisce su di esso una forza esterna, l'energia totale E del sistema viene modificata ($\Delta E \neq 0$) e possiamo dire che il lavoro fatto dalla forza esterna sul sistema è proprio uguale alla variazione dell'energia totale E del sistema ($L = \Delta E$). A riguardo vediamo due esempi. Primo esempio: un oggetto viene sollevato dal pavimento al tavolo applicando ad esso una forza appena necessaria a vincere l'attrazione gravitazionale, il lavoro compiuto da tale forza esterna è uguale alla variazione dell'energia totale del *sistema oggetto più Terra* e cioè $L = \Delta U$ (in questo caso è variata *solo* l'energia potenziale del sistema). Secondo esempio: un oggetto inizialmente fermo sopra un piano (senza attrito) viene messo in movimento applicando ad esso una forza parallela al piano di appoggio, il lavoro compiuto da tale forza esterna è uguale alla variazione dell'energia totale dell'oggetto e cioè $L = \Delta T$ (in questo caso è variata solo l'energia cinetica del sistema).

Quesiti

27.1. Descrivere, dal punto di vista energetico, il moto di un corpo di massa m lanciato verticalmente con velocità v_0 sino al suo ritorno alla posizione iniziale.

27.2. Un ragazzo di 70 kg si arrampica per 5.0 m su una fune che pende sopra un lago sfiorandolo con l'estremità.

[(*)] Dire che il lavoro è una forma di energia è sbagliato in quanto il lavoro è sempre associato ad un delta di energia. È invece corretto dire che il lavoro e l'energia (cinetica, potenziale, totale) hanno le stesse dimensioni e quindi la stessa unità di misura.

(*a*) Di quanto aumenta l'energia potenziale gravitazionale del ragazzo?
(*b*) Se il ragazzo molla la presa sulla fune, quanto varrà la sua energia cinetica quando egli tocca l'acqua?

27.3. Sullo stesso sistema di assi coordinati costruite i grafici dell'energia cinetica, dell''energia potenziale e dell'energia meccanica totale in funzione dell'altezza di una sfera che è stata lanciata verticalmente verso l'alto.

27.4. Il peso di un corpo sulla Luna è circa 1/6 del peso dello stesso corpo sulla Terra. Fino a che altezza un astronauta riesce a lanciare un sasso sulla Luna se sulla Terra riesce a lanciarlo a 15 m di altezza? (Supponete che la tuta spaziale non ostacoli il lancio.)

27.5. Un sasso di massa 0.200 kg viene lanciato verticalmente verso l'alto da un punto situato a un'altezza di 20.0 m sopra la superficie della Terra con un angolo di 60° con l'orizzontale e una velocità di 20.0 m/s.
(*a*) Quanto vale la sua energia totale, se l'energia potenziale è assunta uguale a zero sulla superficie della Terra?
(*b*) Quanto varrà la sua energia totale quando è all'altezza di 15.0 m sopra la superficie della Terra?
(*c*) Quale sarà la sua velocità all'altezza di 15.0 m sopra la superficie della Terra?

27.4. Il potenziale gravitazionale

L'energia potenziale gravitazionale di un corpo di massa m, essendo data da $U_g = mgh$ (con le precisazioni della *terza osservazione* a pag. 322), è direttamente proporzionale alla massa del corpo. Analogamente a quanto si è fatto per definire il campo gravitazionale $\vec{g}$, se si divide l'energia potenziale del sistema Terra-massa, per la massa m si ottiene una *funzione scalare del punto* indipendente dalla massa del corpo. Questa grandezza è detta *potenziale gravitazionale*, viene indicata con V_g ed è data da:

[27.30] $$V_g = \frac{U_g}{m} = gh\,.$$

Si dice anche che V_g è l'energia potenziale gravitazionale riferita all'unità di massa.

L'unità di misura del potenziale gravitazionale è il joule al kilogrammo (J/kg). Questa grandezza dipende soltanto dall'accelerazione di gravità e dall'altezza.

Consideriamo una centrale idroelettrica (Fig. 27.12). Per mezzo di condotte, l'acqua fluisce dal bacino superiore alle turbine poste vicino al bacino inferiore. Dato che acquista energia cinetica nello scendere, l'acqua spinge contro le pale delle turbine, convertendo energia meccanica in energia elettrica. La differenza tra il potenziale gravitazionale alla quota superiore e quello alla quota inferiore rimane fissa:

[27.31] $$\text{d.d.p.} = g\,\Delta h.$$

Quando è necessario produrre una maggiore quantità di energia elettrica, viene lasciata fluire lungo le condotte una maggiore quantità d'acqua.

Per una differenza di quota di 100 m tra il bacino superiore e quello inferiore, la variazione (diminuzione) del potenziale gravitazionale è:

[27.32] $$\Delta V_g = -(9.8\ \text{N/kg})\times(100\ \text{m}) = -9.8\times10^2\ \text{J/kg}.$$

Se 100 kg di acqua passano dalla quota superiore a quella inferiore, la variazione (perdita) di energia potenziale gravitazionale è:

[27.33] $$\Delta U_g = -\,(100\ \text{kg})\times(9.8\times 10^2\ \text{J/kg}) = -9.8\times10^4\ \text{J}.$$

Fig. 27.12. Vista generale della centrale idroelettrica della Hoover Dam, in Nevada (USA), in cui si possono vedere il bacino superiore e l'edificio contenente le turbine alla quota inferiore. La differenza di potenziale gravitazionale tra le due quote è 1.67×10^3 J/kg.

Se l'acqua impiega 10 s per scendere dalla quota superiore a quella inferiore, la perdita di energia potenziale gravitazionale al secondo è 9.8×10^3 J/s. In condizioni ideali questa perdita sarebbe uguale al lavoro riferito all'unità di tempo compiuto dall'acqua sulla turbina e sarebbe appena sufficiente ad alimentare sei riscaldatori elettrici.

Un cavallo da fatica, preso come campione [*], è capace di compiere lavoro alla rapidità di 750 J/s. Perciò, per generare continuamente la stessa quantità di lavoro al secondo occorrerebbero circa 13 cavalli che lavorino giorno e notte.

Una differenza di quota di 100 m è rilevante. Costruire una diga di questa altezza è un'impresa formidabile. Tuttavia, anche una diga così grande richiederà una portata d'acqua molto maggiore dei 10 kg/s del nostro esempio per fornire energia elettrica a un'intera città.

Quesiti

27.6. (*a*) Qual è il potenziale gravitazionale sulla vetta del Monte Everest (altezza 8848 m sul livello del mare) se il potenziale gravitazionale al livello del mare è zero?
(*b*) Qual è l'energia potenziale gravitazionale di uno scalatore di 100 kg (persona ed equipaggiamento) sulla vetta del monte?

27.7. La variazione di quota dell'acqua nella centrale idroelettrica della Hoover Dam (Fig. 27.12) è 170 m. In un giorno normale, fluiscono attraverso le turbine 232 m^3/s.
(*a*) Qual è la variazione dell'energia potenziale gravitazionale dell'acqua al secondo?
(*b*) In condizioni ideali quanta potenza, in watt, questa centrale è capace di sviluppare?

27.5. Lavoro fatto dalla forza elastica. Energia potenziale elastica e conservazione dell'energia meccanica totale

C'è da tenere presente che anche in questo caso, ponendo $\Delta G = -\Delta L$ (lavoro fatto dalla forza elastica della molla) sono verificate le condizioni [27.3] e [27.6] del paragrafo 27.1 a pag. 316 e di conseguenza è possibile definire una grandezza U, funzione esclusivamente della posizione, dopo aver scelto arbitrariamente un punto O come origine. In questo caso è conveniente prendere come origine la posizione dell'estremo libero della molla a riposo. Dalla Fig. 15.1 si ricava:

[27.34] $$U(P) = \sum_{O}^{P} (-\Delta L) = -L_{OP} = L_{PO} = -\left(-\frac{1}{2}kx^2\right) = \frac{1}{2}kx^2$$

questa funzione viene chiamata energia potenziale elastica della molla.

ed inoltre (Fig. 15.2):

[27.35] $$L_{AB} = \sum_{A}^{B} \Delta L = U(A) - U(B) = -\Delta U$$

Se all'estremo libero della molla è vincolato un corpo di massa m:

[27.36] $$L_{AB} = \Delta T$$

ed anche

[27.37] $$L_{AB} = -\Delta U$$

da cui segue

[27.38] $$\Delta T = -\Delta U$$

oppure

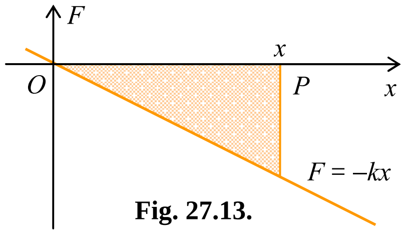

Fig. 27.13.

(*) Il lavoro prodotto dai cavalli è stato introdotto da James Watt per poterlo confrontare con il lavoro prodotto dalla sua macchina a vapore. Più precisamente, il suo campione vale 746 joule al secondo ed è chiamato cavallo vapore (in simboli HP dalla parola inglese *horsepower*) in riferimento al cavallo. Un joule al secondo è chiamato watt in onore di Watt. Entrambe le unità misurano la quantità di energia prodotta nell'unità di tempo, che è definita come potenza. Una centrale idroelettrica è un posto in cui la potenza elettrica viene prodotta mediante la caduta dell'acqua.

[27.39] $\Delta T + \Delta U = 0$

e

[27.40] $T + U = costante$

e, detta $E = T + U$ l'*energia meccanica del sistema molla + massa m* si ha il principio di conservazione dell'energia meccanica (per una molla ideale):

[27.41] $\Delta E = 0$

e

[27.42] $E = cost$

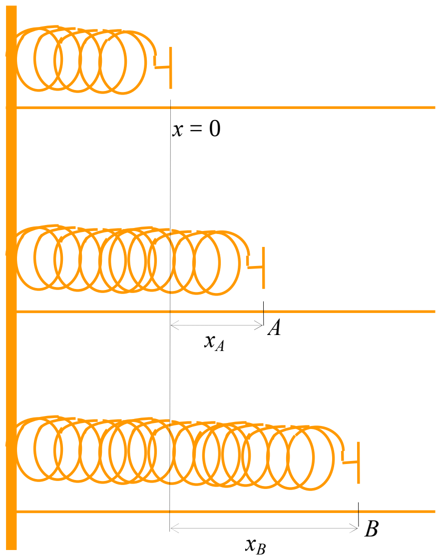

Fig. 27.14.

Quesiti

27.8. Considerate una molla lunga 4.0 m con una costante elastica di 500 N/m.
(*a*) Qual è l'energia potenziale elastica immagazzinata nella molla se essa è accorciata di 1.0 m?
(*b*) Qual è la forza necessaria per accorciare la molla di 1.0 m?
(*c*) Perché esistono automobili giocattolo ma non automobili reali azionate da una molla?

27.9. (*a*) Una molla viene accorciata di 0.20 m da una forza di 20 N e di 0.30 m da una forza di 30 N. Qual è il valore della costante elastica k della molla?
(*b*) Qual è la relazione per l'energia potenziale immagazzinata dalla molla in funzione del suo accorciamento?

27.10. Avete due pendoli semplici ciascuno lungo 2.0 m. Allontanate la pallina del primo di 15 cm dalla sua posizione di riposo e l'abbandonate a se stessa; allontanate la seconda di 30 cm e l'abbandonate a se stessa. Qual è il rapporto E_1/E_2 tra le loro energie meccaniche?

27.11. Un oggetto di massa m, fermo su di un tavolo privo di attrito, è legato ad un respingente a molla, avente una determinata costante k. Lo si sposta di una distanza d lungo l'asse della molla, e quindi lo si lascia andare, in modo che oscilli avanti e indietro.
(*a*) Quanta, della sua energia totale, è energia potenziale quando il suo spostamento è uguale a $d/2$?
(*b*) Qual è il suo spostamento quando l'energia cinetica è uguale all'energia potenziale?
(*c*) Quale sarebbe l'effetto sull'energia totale se il suo spostamento fosse uguale a $2d$?

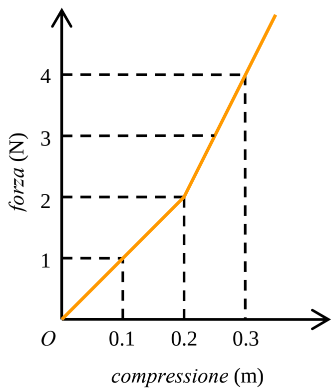

Fig. A

27.12. Nella Fig. A è mostrato il grafico *forza-compressione* di una molla.
(*a*) Quanto lavoro è stato eseguito nel comprimere la molla di 0.3 m?
(*b*) Qual è l'energia potenziale della molla così compressa?
(*c*) Ponete una massa di 2 kg all'estremità libera della molla compressa di 0.3 m e lasciatela andare. Qual è l'energia cinetica della massa quando passa per il punto nel quale la molla risulta compressa di 0.2 m?

27.13. Una palla di massa m cade da un'altezza h, com'è indicato nella Fig. B, e comprime di un tratto x una molla di costante elastica k. La massa della molla è trascurabile rispetto alla massa della palla.
(*a*) Esprimere la compressione massima della molla, x, in funzione di m, h e k.
(*b*) Calcolare x prendendo m = 4 kg, h = 3 m e k = 500 N/m.

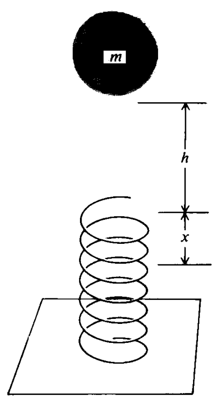

Fig. B

27.14. Un oggetto di massa uguale a 1.0 kg, che si muove con una velocità di 10 m/s, urta una molla comprimendola per 0.20 m. L'oggetto rimbalza con una velocità di 8.0 m/s.

(*a*) Qual è la perdita di energia cinetica della massa?

(*b*) Che cosa ne è di questa energia perduta?

(*c*) Quale dei tre grafici *forza-compressione*, mostrati nella Fig. C, pensate sia il più probabile per questa molla?

27.15. Una molla lineare di costante elastica *k* viene compressa fra due dischi a ghiaccio secco di massa m_1 ed m_2. La molla viene compressa di un tratto *x* e quindi legata con un filo. Entrambi i dischi sono inizialmente fermi.

(*a*) Se il filo viene bruciato, qual è l'energia cinetica totale di entrambi i dischi?

(*b*) Quali sono le quantità di moto dei dischi e quale relazione intercorre fra esse?

(*c*) Qual è l'energia cinetica di ciascun disco espressa in funzione della quantità di moto e della massa?

(*d*) Quale frazione dell'energia totale acquista ciascun disco? Qual è il rapporto fra le energie cinetiche acquistate da ciascun disco?

$$\left[\mathrm{R.:}\frac{m_2}{m_1+m_2};\frac{m_1}{m_1+m_2};\frac{m_2}{m_1}\right]$$

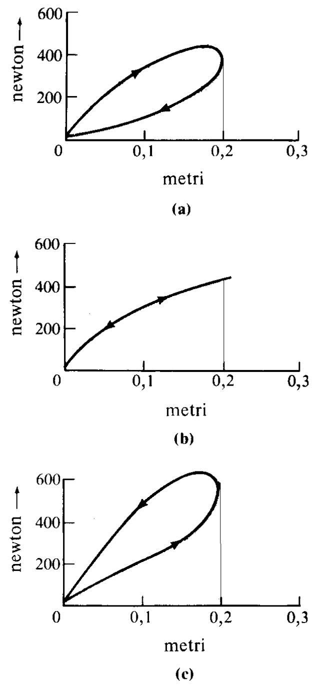

Fig. C

27.16. Un respingente a molla avente una forza di richiamo F = (200N/m)x, dove F è misurato in newton ed x in metri, è compresso di 0.100 m. Un oggetto di massa uguale a 0.500 kg è posto vicino all'estremità della molla e il tutto viene lasciato libero.

(*a*) Con quale quantità di moto l'oggetto lascerà la molla?

(*b*) La stessa cosa viene fatta con oggetti di massa uguale a 0.125 kg, 2.00 kg e 8.00 kg. Qual è la quantità di moto di ciascuno di essi quando lasciano la molla?

(*c*) Qual è l'energia di ciascuno di essi, quando lasciano la molla?

27.17. Una molla lineare, il cui rapporto tra forza ed allungamento è k = 40 N/m, è appesa verticalmente e sostiene un oggetto fermo di 0.80 kg. L'oggetto viene poi tirato in basso di una distanza pari a 0.15 m.

(*a*) Di quanto risalirà?

(*b*) Quale sarà la sua velocità massima?

(*c*) Come differirebbero le risposte (*a*) e (*b*) se l'esperimento fosse fatto sulla Luna?

27.18. Una piccola sfera di piombo è legata ad una estremità di uno spago, mentre l'altra estremità è fissata in modo tale che la sfera possa oscillare. La distanza fra l'estremità superiore dello spago ed il centro della sfera è di 2.00 m. La sfera viene spostata da un lato in modo tale che lo spago formi un angolo di 30° con la verticale, quindi viene lasciata andare.

(*a*) Con quale velocità la sfera passa per il punto più basso della sua oscillazione?

(*b*) È questo un moto armonico semplice? Argomentare la risposta.

27.19. Descrivere le variazioni di energia del tuffatore mostrato nella fotografia multiflash della Fig. D. Perché all'inizio salta in direzione quasi verticale?

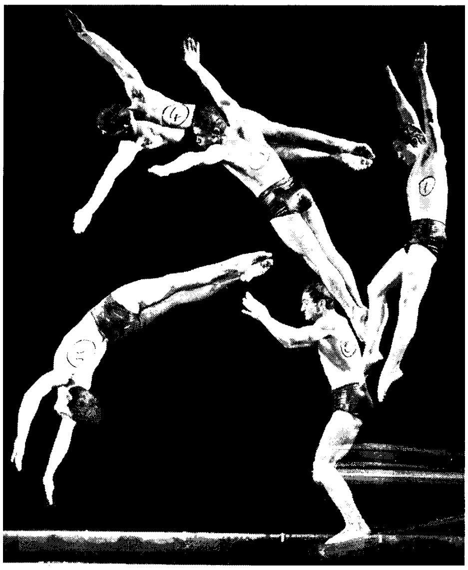

Fig. D

27.6. Energia potenziale gravitazionale (caso generale) e conservazione dell'energia meccanica totale.

Nel paragrafo 27.3, abbiamo determinato l'energia potenziale gravitazionale di una massa *m* posta in vicinanza della Terra, nella ipotesi che l'intensità del campo gravitazionale fosse costante. D'altra parte sappiamo che, via via che due corpi si allontanano, le forze gravitazionali agenti tra essi variano: qual è la corretta espressione dell'energia potenziale gravitazionale in questo caso più generale? Qual è, ad esempio, l'energia potenziale gravitazionale del sistema costituito dalla Terra e da un satellite?

Come sappiamo il modulo della forza di attrazione agente tra la Terra e un satellite di massa *m* è $F_g = G\dfrac{Mm}{r^2}$, dove *r* è la distanza del satellite dal centro della Terra e *M* la massa della Terra. La curva, rappresentata in Fig.27.15, è il grafico del modulo della forza in funzione della distanza.

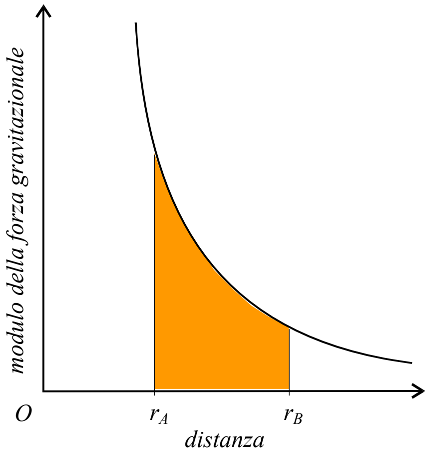

Fig. 27.15.

L'area compresa sotto questa curva, tra due diverse ascisse, misura il lavoro eseguito, in modulo, quando varia la distanza, rappresentata in ascisse. Per esempio, l'area segnata in colore rappresenta il lavoro, in modulo, fatto dalla forza gravitazionale quando il corpo *m* si sposta dalla distanza r_A alla distanza r_B (tale lavoro è negativo come vedremo tra poco). Usando metodi matematici un po' più complicati, potremmo trovare una qualsiasi area compresa sotto la curva forza-distanza.

Vediamo ora brevemente un metodo per il calcolo del lavoro fatto dalla forza gravitazionale quando il corpo *m* si sposta dalla distanza r_A alla distanza r_B (e quindi anche dell'area segnata in colore). Tale metodo sarà pienamente discusso in quinta classe.

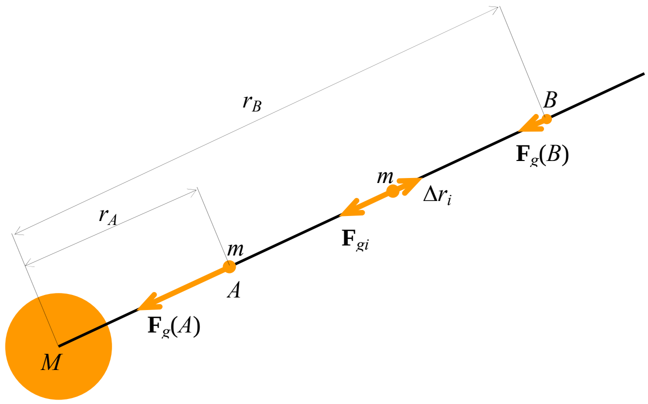

Fig. 27.16. I vettori forza non sono in scala

Facendo riferimento alla Fig. 27.16 si ha:

$$L_{AB} = \lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_i \Delta L_i = \lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_i \mathbf{F}_{gi} \times \Delta \mathbf{r}_i =$$

$$= \int_{r_A}^{r_B} \mathbf{F}_g \times d\mathbf{r} = \int_{r_A}^{r_B} -G\frac{Mm}{r^2}dr = -GMm\int_{r_A}^{r_B}\frac{1}{r^2}dr =$$

$$= -GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = -GMm\left(-\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_A}\right) =$$

$$= -GMm\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right) \qquad [27.43]$$

Ad esempio (Fig. 27.17) quando il corpo di massa *m* si sposta da *A* all'infinito ($r_B \to \infty$) il campo gravitazionale compie un lavoro dato da:

[27.44] $$L_{A\infty} = -GMm\frac{1}{r_A}$$ *(lavoro negativo).*

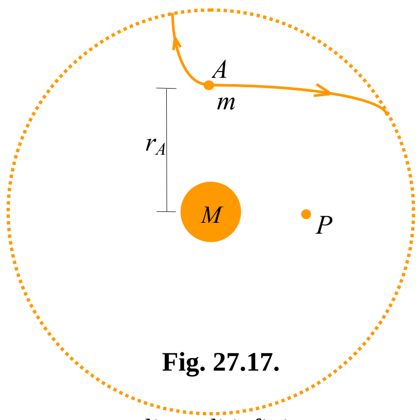

Fig. 27.17.

linea di infinito

Ora sappiamo che il campo di forze gravitazionali è conservativo (si veda l'ultima parte del paragrafo 27.2), cioè sono verificate le condizioni [27.3] e [27.6] del paragrafo 27.1 con $\Delta G = -\Delta L$, e di conseguenza è possibile definire una grandezza *U*, funzione esclusivamente della posizione, dopo aver scelto arbitrariamente un punto *O* come origine. In questo caso è conveniente prendere come origine tutti i punti che si trovano a distanza infinita dalla Terra (attenzione!! è l'infinito fisico):

[27.45] $U(P)=\sum_{\infty}^{P}(-\Delta L)=-L_{\infty P}=L_{P\infty}=-G\dfrac{Mm}{r_P}$

questa funzione viene chiamata energia potenziale gravitazionale del sistema composto dalle due masse M e m.

Inoltre essendo:

[27.46] $L_{AB}=\sum_{A}^{B}\Delta L=U(A)-U(B)=-\Delta U$

si ottiene:

[27.47] $U(A)-U(B)=-\dfrac{GMm}{r_A}+\dfrac{GMm}{r_B}$

da cui, ricordando che $L_{AB}=\Delta T$ e $L_{AB}=-\Delta U$, si ottiene:

[27.48] $\Delta T=-\Delta U$

o anche

[27.49] $\Delta T+\Delta U=0$

e infine:

[27.50] $T+U=costante.$

Per un satellite di massa m posto a distanza r dalla Terra la somma dell'energia cinetica e potenziale è costante: $\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mm}{r}=cost$; detta $E = T + U$ l'*energia meccanica del sistema Terra + satellite* si ha il principio di conservazione dell'energia meccanica in presenza della sola forza gravitazionale:

[27.51] $\Delta E=0$

e quindi:

[27.52] $E=costante$.

Occorre riflettere sul fatto che l'energia potenziale gravitazionale di un satellite di massa m risulta negativa e il suo valore è zero a distanza infinita dalla Terra. Se il satellite si sta allontanando dalla Terra la sua energia potenziale aumenta (in modulo diminuisce) fino al punto in cui non risente più della forza di attrazione in cui il valore di U diventa zero. Quando invece il satellite si avvicina alla Terra la sua energia potenziale diminuisce (in modulo aumenta) fino a quando arriva sulla sua superficie sopra alla quale possiederà una $U=-G\dfrac{Mm}{r_T}$ dove r_T è il raggio della Terra.

Quesiti

27.20. Qual è l'energia potenziale di una massa di 1 kg sulla superficie della Terra (distante 6.38×10^6 m dal centro della Terra) se l'energia potenziale a grande distanza è nulla?

27.21. Di quanto aumenta l'energia potenziale di un corpo di massa 3 kg se viene sollevato dalla superficie della Terra a un'altezza di 1000 km?

27.22. Studiare da un punto di vista energetico il moto di un razzo sparato verticalmente dalla superficie terrestre con un certa energia cinetica. Valori: massa del razzo m = 1000 kg, massa della Terra M=5.98×10^{24} kg, raggio della Terra $R_T = 6.378\times10^6$ m,
(*a*) energia cinetica iniziale: $T = 6.26\times10^9$ J;
(*b*) energia cinetica iniziale: $T = 6.26\times10^{10}$ J;
(*c*) energia cinetica iniziale: $T = 6.26\times10^{11}$ J.

27.23. I satelliti S_1 e S_2 hanno la stessa massa e si trovano sulle orbite circumterrestri indicate nella Fig. E. Nei punti *A* e *A'* essi sono alla stessa distanza dalla Terra e hanno velocità uguali in modulo.
(*a*) Confrontate le energie potenziali dei satelliti nei punti *B* e *B'*.
(*b*) Confrontate le energie totali dei satelliti nei punti *B* e *B'*.
(*c*) Confrontate le loro energie cinetiche nei punti *B* e *B'*.

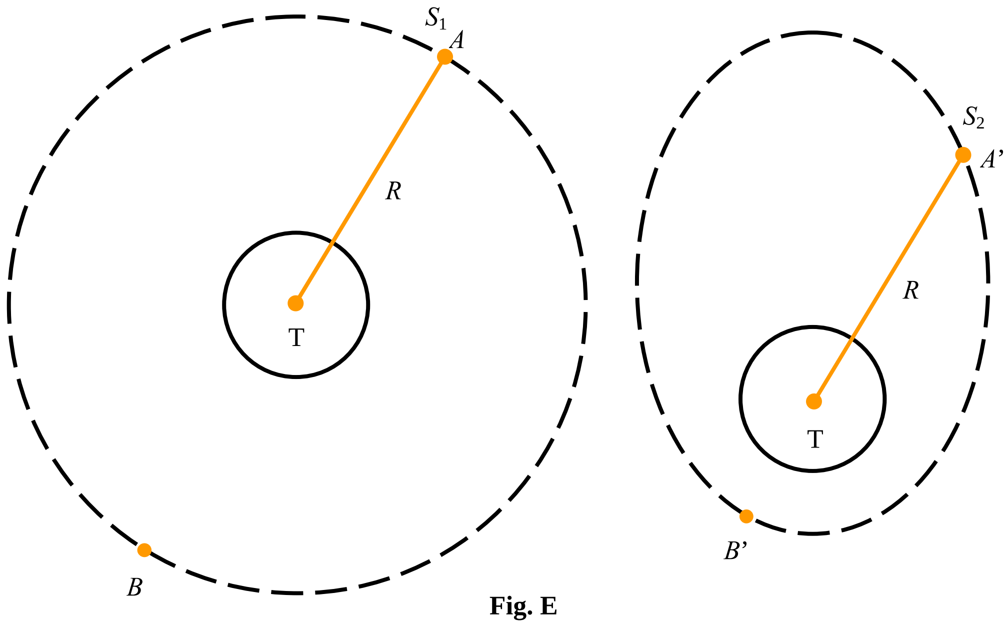

Fig. E

27.7. Energia e velocità di fuga. - Energia di legame per un sistema di corpi.

Con quanta energia si deve lanciare un razzo affinché esso fugga dalla Terra? Dalla relazione [27.45] del paragrafo precedente vediamo che l'energia potenziale gravitazionale di una massa m situata a una distanza r dal centro della Terra è semplicemente:

[27.53] $$U(r) = -G\frac{Mm}{r}$$

Dove M è la massa della Terra e l'energia potenziale a distanza infinita è stata posta uguale a zero. Supponiamo di volere lanciare il razzo dalla superficie della Terra con energia sufficiente a inviarlo a grande distanza e in modo che non gli rimanga poi energia.
Nel lancio dobbiamo impartirgli un'energia cinetica iniziale pari a:

[27.54] $$T = +G\frac{Mm}{r_T}$$

dove r_T è il raggio della Terra. Quindi, la variazione dell'energia cinetica, da $+GMm/r_T$ a zero, è esattamente uguale alla variazione dell'energia potenziale da $-GMm/r_T$ a zero, ossia $\Delta T = -\Delta U$. Questa quantità di energia cinetica è la quantità minima che il razzo deve avere per sfuggire all'attrazione gravitazionale della Terra. È importante rilevare che questa *energia cinetica di fuga*, $T = GMm/r_T$, è direttamente proporzionale alla massa del satellite. Lanciare un razzo di massa maggiore richiederebbe pertanto maggiore energia.
Introducendo nella [27.54] i valori numerici della costante di gravitazione universale G, della massa della Terra M (5.98×10^{24} kg) e del suo raggio r_T (6.38×106 m) troviamo che l'energia cinetica di fuga deve essere pari a 6.24×10^7 J per kilogrammo di massa del razzo. Un razzo di massa 1000 kg per fuggire completamente dalla Terra richiede quindi un'energia di 6.24×10^{10} J.

Possiamo anche trovare la velocità iniziale v_f che il razzo deve avere per fuggire dalla Terra. Poiché l'energia cinetica è $\frac{1}{2}mv^2$, possiamo scrivere l'energia cinetica di fuga nella forma:

[27.55] $$T = +G\frac{Mm}{r_T} = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Poiché la massa del razzo compare in entrambe le espressioni per T, possiamo eliminarla, ottenendo:

[27.56] $$\frac{1}{2}v_f^2 = G\frac{M}{r_T} = 6.24\times10^7\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

che è indipendente dalla massa del razzo.

Considerando che 1 J/kg = 1 (m/s)^2, si ha:

[27.57] $$v_f = \sqrt{2\cdot G\frac{M}{r_T}} = 1.12\times10^4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ovvero 11.2 km/s. Come potete notare la velocità v_f, detta *velocità di fuga*, non dipende dalla massa del razzo che viene lanciato. La velocità di fuga è dunque la velocità iniziale che si deve imprimere a un corpo *qualsiasi* affinché fugga dalla Terra senza farvi ritorno mai più.

Alcuni razzi sono progettati non per sfuggire all'attrazione gravitazionale terrestre, ma per collocare un satellite in un'orbita stazionaria attorno alla Terra a qualche centinaio di kilometri soltanto sopra la sua superficie. È interessante confrontare l'energia necessaria per mettere in orbita un satellite con l'energia che sarebbe necessaria per farlo fuggire dalla Terra. Per semplificare il calcolo facciamo due ipotesi piuttosto ragionevoli. In primo luogo supponiamo che l'orbita sia circolare; ciò richiede una regolazione piuttosto delicata delle condizioni di lancio, ma è possibile. In secondo luogo consideriamo come valore approssimato del raggio dell'orbita il raggio della Terra. Se il satellite è immediatamente al disopra dell'atmosfera, come nel caso dei satelliti con a bordo degli astronauti, per esempio, questi raggi differiranno soltanto del 2 o 3%.

Per muoversi in un'orbita circolare di raggio r_T (orbita rasoterra) alla velocità di modulo costante v, un satellite di massa m richiede una forza centripeta pari a mv^2/r_T che sarà fornita dalla forza gravitazionale della Terra $GMm\big/r_T^2$ .Perciò:

[27.58] $$\frac{mv^2}{r_T} = \frac{GMm}{r_T^2} \quad \text{o} \quad mv^2 = \frac{GMm}{r_T}.$$

Quindi l'energia cinetica del satellite in orbita è:

[27.59] $$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r_T}$$

Come potete notare, questo valore dell'energia è esattamente uguale alla metà dell'energia cinetica di fuga. In altre parole, mettere un satellite in orbita immediatamente al disopra dell'atmosfera terrestre richiede una quantità di energia pari soltanto alla metà di quella richiesta per lanciare il satellite permanentemente lontano dalla Terra.

Un satellite in orbita si trova infatti ancora nel campo gravitazionale della Terra e quindi oltre all'energia cinetica, possiede anche l'energia potenziale di separazione $U = -GMm/r_T$ in corrispondenza del raggio r_T. Perciò si può affermare che l'*energia totale* del sistema costituito dal satellite in orbita e dalla Terra è uguale a:

[27.60] $$E = T + U = \frac{1}{2}\frac{GMm}{r_T} + \left(-\frac{GMm}{r_T}\right) = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r_T}.$$

Teorema del viriale

Qual è il significato del segno negativo per l'energia totale? Nel paragrafo precedente abbiamo posto l'energia potenziale uguale a zero a distanza infinita. Se anche l'energia cinetica del satellite è nulla a tale distanza, l'energia totale è uguale a zero. L'energia totale negativa indica quindi che si deve compiere lavoro sul satellite per portarlo ad avere velocità nulla e a una distanza infinita, condizione in cui la sua energia totale è uguale a zero.

Quando il satellite ha un'energia minore di quella necessaria per sfuggire al campo gravitazionale terrestre, si dice che è legato alla Terra. L'energia che si deve fornire per rompere il legame e permettere al satellite di fuggire è detta *energia di legame*.

Affinché un satellite in orbita intorno alla Terra immediatamente al disopra dell'atmosfera terrestre possa fuggire, gli si deve fornire una quantità di energia tale che E si annulli; l'energia di legame sarà quindi:

[27.61] $$\text{energia di legame} = +\frac{1}{2}\frac{GMm}{r_T}.$$

Nel caso del satellite di 10^3 kg l'energia di legame risulta pari a 3.12×10^{10} J in un'orbita appena al disopra dell'atmosfera terrestre, mentre quando il satellite è in quiete sulla superficie della Terra prima del lancio, l'energia totale è l'energia potenziale $-GMm/r_T$ e, quindi, l'energia di legame è $+GMm/r_T = 6.24\times10^{10}$ J (esattamente il doppio di quella del satellite in orbita). La nostra energia di legame sulla superficie della Terra (l'energia necessaria per essere lanciati nello spazio esterno) ammonta a circa 4 o 5×10^9 J. Possiamo trovare anche l'energia di legame della Terra rispetto al Sole; si ha:

[27.62] $$\text{energia di legame} = \frac{GM_{Sole}m_{Terra}}{2r_0}.$$

dove r_0, è il raggio dell'orbita della Terra intorno al Sole. La dimostrazione è identica a quella per il satellite in orbita intorno alla Terra.

Nel caso generale, quando un corpo situato in un campo gravitazionale ha un'energia totale:

[27.63] $$E = T + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r_T}.$$

negativa, il corpo è «legato» dal campo gravitazionale con energia di legame:

[27.64] $$-E = \frac{GMm}{r_T} - \frac{1}{2}mv^2.$$

Esistono energie di legame anche in fisica atomica, per esempio, l'energia che lega l'elettrone al protone nell'atomo di idrogeno. Però i valori di queste energie di legame sono molto diversi da quelli considerati precedentemente ed esse si originano da forze elettriche, anziché da forze gravitazionali. Esamineremo queste energie di legame atomiche successivamente.

Quesiti

27.24. Quanto lavoro occorre per lanciare un satellite di 100 kg dalla Terra e farlo muovere sull'orbita terrestre, ma dalla parte opposta rispetto al Sole, com'è indicato nella Fig.F? [R. $L\cong6.28\times10^9$ J, *il satellite è già in orbita attorno al Sole e deve solo abbandonare la Terra*]

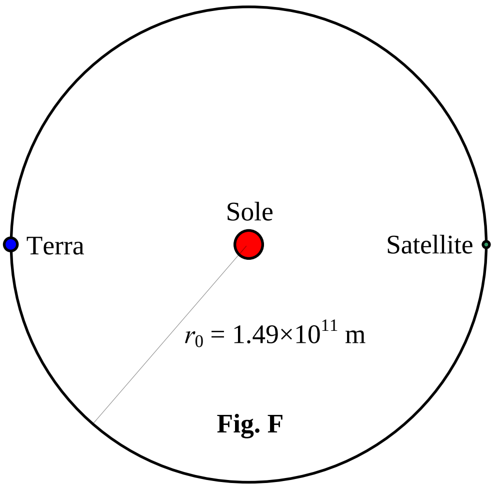

Fig. F

27.25. Di quanto lavoro avrebbe bisogno il satellite del quesito precedente per abbandonare il sistema solare a partire dalla situazione precedente? [R. $L=4.43\times10^{10}$ J]

27.26. Qual è il rapporto fra l'energia necessaria per sfuggire al sistema solare e l'energia necessaria per sfuggire alla Terra, per un satellite lanciato dalla Terra? [R. ≅8]

27.27. Calcola la tua energia di legame rispetto alla Terra esprimendola in joule (la massa della Terra è circa 6×10^{24} kg). Il valore che hai calcolato concorda approssimativamente con il valore indicato nel paragrafo 27.7?

27.28. Un satellite si muove in un'orbita circolare intorno alla Terra con energia cinetica T. Quanta energia aggiuntiva sarebbe necessaria per farlo fuggire dalla Terra?

27.29. Un razzo di massa m smette di salire lungo la verticale quando ha raggiunto una distanza di $10r_T$ dal centro della Terra. Quanta energia aggiuntiva richiederebbe per fuggire dalla Terra?

27.30. Confronta la velocità di fuga di un granello di sabbia di 10 mg e quella di un razzo di 10^3 kg. (Trascura gli effetti della resistenza dell'aria.)

27.31. (*a*) Un blocchetto di ghiaccio secco di 0.25 kg con una velocità di 2.0 m/s si stava muovendo verso destra su una superficie orizzontale liscia come è illustrato nella Fig. G quando è caduto nella «buca». È rappresentato nel punto P mentre sta scendendo strisciando lungo la superficie inclinata, a sinistra, della buca. A che altezza arriverà sulla superficie inclinata, a destra, della buca il blocchetto prima di arrestarsi momentaneamente? Descrivi il moto del blocchetto dopo che si è arrestato in questo punto.

(*b*) Se il blocchetto di ghiaccio secco viene abbandonato a se stesso nel punto *P* dalla condizione di quiete, di che tipo sarà il suo moto? Fino a che altezza salirà sulla superficie inclinata, a destra? Quanto vale l'energia di legame (l'energia aggiuntiva necessaria per fare fuggire il blocchetto dalla buca nel centro della figura)?

(*c*) Qual è l'energia di legame nel caso considerato nel punto (*a*)?

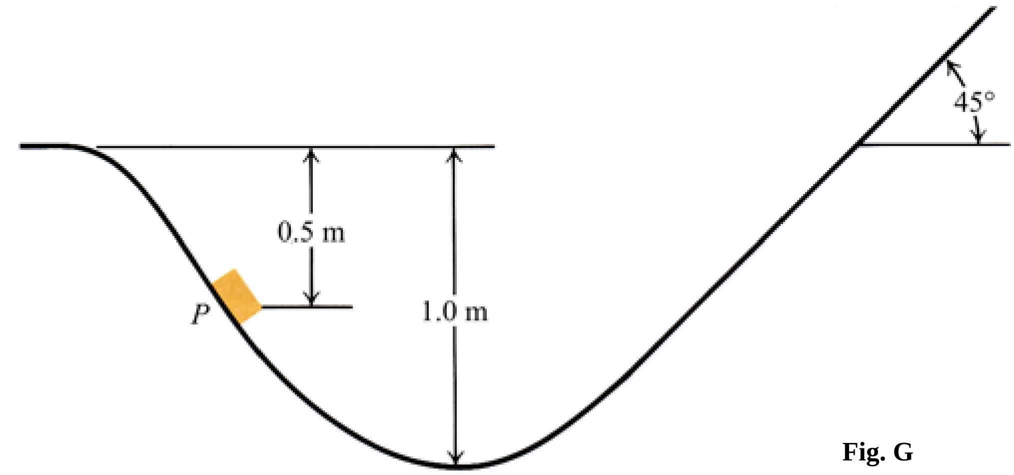

Fig. G

27.8. Energia potenziale elettrica.

Sappiamo che, in accordo con la legge di Coulomb, due cariche puntiformi, Q e q , poste a distanza r, si attraggono se hanno segno opposto ($Q \cdot q<0$) mentre si respingono se hanno stesso segno ($Q \cdot q>0$). Nella Fig.27.18 è rappresentato l'andamento del modulo della forza di interazione, $F = k_{el}\dfrac{|Q \cdot q|}{r^2}$, in funzione della distanza tra le due cariche.

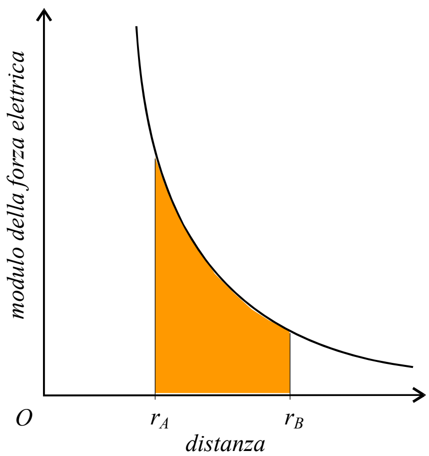

Fig. 27.18.

L'area compresa sotto questa curva, tra due diverse ascisse, misura il lavoro eseguito, in modulo, quando varia la distanza, rappresentata in ascisse. Per esempio, l'area segnata in colore rappresenta il lavoro, in modulo, fatto dalle forze del campo elettrico (generato da Q) quando la carica q si sposta dalla distanza r_A alla distanza r_B (il segno del lavoro dipende dal segno di entrambe le cariche)[(*)]. Usando metodi matematici analoghi a quelli utilizzati nel caso della forza gravitazionale, potremmo trovare una qualsiasi area compresa sotto la curva forza-distanza.

Quindi il calcolo del lavoro fatto dalle forze del campo elettrico generato da Q quando la carica q si sposta dalla distanza r_A alla distanza r_B si sviluppa nel modo seguente.
In riferimento alla Fig. 27.19:

$$L_{AB} = \lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_i \Delta L_i = \lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_i \mathbf{F}_{ei} \times \Delta \mathbf{r}_i =$$

$$= \int_{r_A}^{r_B} \mathbf{F}_e \times d\mathbf{r} = \int_{r_A}^{r_B} k_{el} \frac{Qq}{r^2} dr = k_{el} Qq \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr =$$

[(*)] L'area segnata in colore rappresenta anche:

- nel caso $Q \cdot q<0$, il lavoro che deve essere compiuto da una forza esterna per allontanare le due cariche, ovvero per portare la distanza tra le cariche da r_A a r_B;
- nel caso $Q \cdot q>0$, il lavoro che deve essere compiuto da una forza esterna per avvicinare le due cariche, ovvero per portare la distanza tra le cariche da r_B a r_A.

[27.65]
$$= k_{el}Qq\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = k_{el}Qq\left(-\frac{1}{r_B}+\frac{1}{r_A}\right) =$$
$$= k_{el}Qq\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)$$

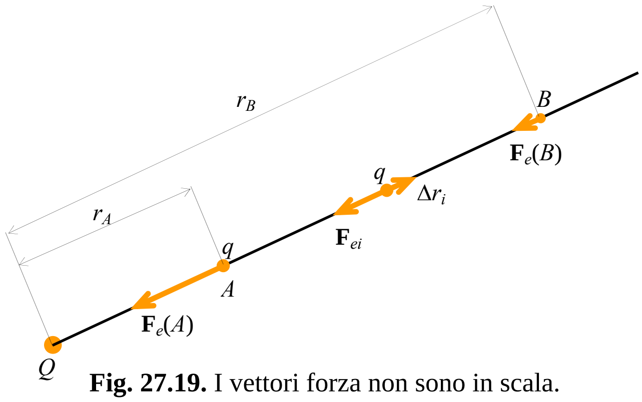

Fig. 27.19. I vettori forza non sono in scala. Q e q sono di segno opposto.

<u>Osservazione 1</u>: da notare che non si è tenuto conto del segno nel prodotto scalare $\mathbf{F}_e \times d\mathbf{r}$ in quanto tale espressione vale qualunque sia il segno delle due cariche con l'accortezza di *considerare le due grandezze Q e q con il rispettivo segno*.

<u>Osservazione 2</u>: lo stesso ragionamento si può effettuare considerando la carica q ferma e quindi il lavoro compiuto dal campo elettrico da essa generato quando la carica Q si allontana o si avvicina alla carica q. In realtà quello che conta è la distanza fra le due cariche e la sua variazione.

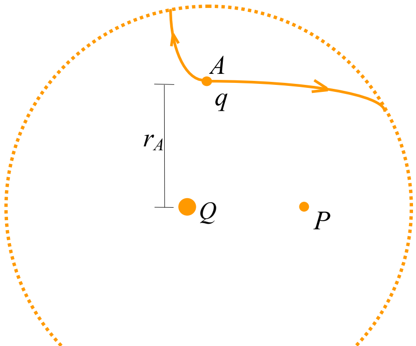

Fig. 27.20.

linea di infinito

Ad esempio (Fig. 26.20) quando la carica q si sposta da A all'infinito ($r_B \to \infty$) il campo elettrico di Q compie un lavoro dato da:

[27.66] $$L_{A\infty} = k_{el}Qq\frac{1}{r_A}$$ (*considerare le due grandezze Q e q con il rispettivo segno*).

Poiché il campo di forze elettriche è conservativo (vedi l'ultima parte del paragrafo 27.2), cioè sono verificate le condizioni (1) e (4) del paragrafo 27.1 con $\Delta G = -\Delta L$, è possibile definire una grandezza U, funzione esclusivamente della posizione, dopo aver scelto arbitrariamente un punto O come origine. Anche in questo caso è conveniente prendere come origine tutti i punti che si trovano a distanza infinita dalla carica Q (attenzione!! è l'infinito fisico):

[27.67] $$U(P) = \sum_{\infty}^{P}(-\Delta L) = -L_{\infty P} = L_{P\infty} = k_{el}\frac{Qq}{r_P}$$ (*)

questa funzione viene chiamata energia potenziale elettrica del sistema composto dalle due cariche Q e q.

Inoltre:

[27.68] $$L_{AB} = \sum_{A}^{B}\Delta L = U(A) - U(B) = -\Delta U$$

Dato che $L_{AB} = \Delta T$ ed anche $L_{AB} = -\Delta U$,

segue

[27.69] $$\Delta T = -\Delta U$$

oppure

[27.70] $$\Delta T + \Delta U = 0$$

e quindi

[27.71] $$T + U = costante\ .$$

(*) Come si è già trovato per le altre energie potenziali sinora incontrate, anche l'energia potenziale elettrica è definita a meno di una costante additiva. Sia l'energia potenziale elettrica che quella gravitazionale in generale (campo non uniforme) dipendono dalla scelta di U_∞, mentre quella gravitazionale in prossimità della superficie della Terra (campo uniforme) dipende dalla scelta del livello di riferimento o livello di zero e analogamente per l'energia potenziale elastica.

Per la carica q posta a distanza r dalla carica Q e dotata di energia cinetica:

[27.72] $$\frac{1}{2}m_q v^2 - k_{el}\frac{Qq}{r} = cost\ .$$

Detta $E = T + U$ l'*energia totale del sistema composto dalle due cariche* si ha il principio di conservazione dell'energia in presenza della sola forza elettrica:

[27.73] $$\Delta E = 0$$

e

[27.74] $$E = cost\,.$$

Analogamente a quanto abbiamo trovato nel caso di corpi che si muovono vicino alla superficie della Terra, di oggetti spinti da molle, di corpi celesti orbitanti, anche l'energia totale [27.74] si conserva. È importante notare che E, nel caso $Q\cdot q>0$, essendo la somma di due quantità positive, risulta essere sempre positiva, mentre, nel caso $Q\cdot q<0$, può essere sia positiva, che negativa, che nulla. Dei due casi, quello di due cariche di segno opposto è senz'altro il più interessante, in quanto è molto simile al caso gravitazionale contemplando la possibilità, per $E < 0$, di avere sistemi legati quali atomi o molecole. Per esempio, secondo il modello di Bohr-Sommerfeld dell'atomo di idrogeno(**) (il più semplice esempio di sistema legato di cariche elettriche), l'elettrone con carica $-e$ gira attorno al protone avente carica $+e$, descrivendo orbite ellittiche con velocità minima quando si trova a distanza massima dal nucleo e con velocità massima quando si trova a distanza minima dal nucleo. Ovvero, ragionando in termini di conservazione dell'energia totale, quando le due particelle cariche (di segno opposto) si allontanano, ciò che viene acquistato in energia potenziale viene compensato da una uguale perdita in energia cinetica o, viceversa, quando le due particelle si avvicinano, ciò che viene perso in energia potenziale, viene compensato da un uguale guadagno in energia cinetica. Come nel caso gravitazionale, anche nel caso elettrico $Q\cdot q<0$ (***) si parla di *energia di legame* intendendo con questo termine quell'energia che bisogna fornire dall'esterno per portare a zero l'energia totale del sistema, cioè per rompere il legame dovuto all'interazione coulombiana. Per l'atomo di idrogeno si parla di *energia di ionizzazione* (in questo caso equivalente a energia di legame) intendendo così l'energia necessaria per strappare l'elettrone al suo nucleo.

Quesiti

27.32. Due corpiccioli sferici che portano cariche di +3 μC e −8 μC sono separati inizialmente da una distanza di 4 cm. Qual è la variazione dell'energia potenziale elettrostatica se la distanza di separazione viene aumentata di 2 cm? Quanto lavoro è stato compiuto? Qual è la variazione dell'energia potenziale elettrostatica se la distanza viene ridotta a 2 cm? In quest'ultimo caso viene compiuto un lavoro sulle cariche?

27.33. Quanto lavoro si deve compiere per spostare la carica q=+2mC da A a B? (Nella Fig. H le cariche sono espresse in millicoulomb)

27.34. Qual è la differenza di energia potenziale elettrostatica fra le configurazioni A e B? (Nella Fig. I le cariche sono espresse in millicoulomb)

27.35. Due protoni (Fig. J)sono separati da una distanza di 10^{-9} m. Un elettrone si trova sulla congiungente i protoni ad una distanza di 1 Å da uno di essi. Quanto lavoro si deve compiere per spostare l'elettrone fino al punto B, situato ad

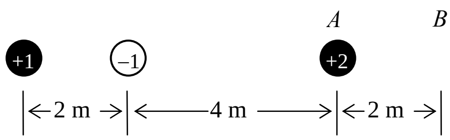

Fig. H

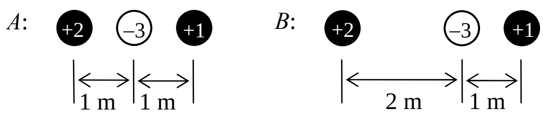

Fig. I

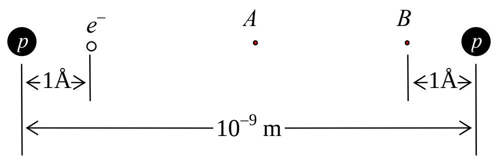

Fig. J

(**) L'atomo di idrogeno è l'atomo più semplice esistente in natura: esso è composto da un solo protone che costituisce il nucleo e da un solo elettrone che gli gira intorno. Il protone e l'elettrone essendo particelle cariche con massa interagiscono sia elettricamente che gravitazionalmente ma, delle due interazioni quella predominante è l'interazione coulombiana, quella gravitazionale è del tutto trascurabile.

(***) Nel caso di due cariche aventi lo stesso segno ($Q\cdot q>0$) non ha senso parlare di sistema legato in quanto la forza coulombiana è repulsiva e, come già detto, l'energia totale E può essere solo positiva.

una distanza di 1 Å dall'altro protone? Qual è la variazione di energia potenziale se l'elettrone viene spostato fino al punto *A*, situato a metà strada fra i due protoni? (1 Å = 10^{-10} m)

27.36. Esprimere in funzione dell'energia potenziale *U*, l'energia cinetica *T* e l'energia totale *E* dell'elettrone di un atomo di idrogeno che descrive un'orbita circolare di raggio *r* attorno al suo nucleo.

27.37. Rappresentare in funzione di *r* e su di un medesimo diagramma, le energie *U*, *T*, *E* del quesito precedente.

27.38. Determinare l'energia di ionizzazione per un atomo di idrogeno che si trova nello stato fondamentale. Nello stato fondamentale, secondo il modello di Bohr-Sommerfeld, l'elettrone si muove su un orbita circolare di raggio 0.53 Å (1 Å = 10^{-10} m).

27.39. Una carica q_1 è a una distanza *r* da una carica stazionaria q_2. Se q_1 può allontanarsi liberamente sotto la repulsione della forza coulombiana, quanto varrà la sua energia cinetica a una distanza molto grande fra le due cariche?

27.40. Una carica mobile *q* è a una distanza 2*r* da una carica stazionaria *Q*. Quanto lavoro è necessario, in funzione di *Q*, *q* e *r*, per portare la carica mobile a una distanza *r* da *Q*?

27.9. Oltre la conservazione dell'energia meccanica

In questo capitolo abbiamo concentrato l'attenzione sul lavoro compiuto da forze quali la forza gravitazionale vicino e lontano dalla superficie della Terra, la forza elastica delle molle e la forza elettrica tra cariche di segno uguale e opposto. Queste forze dipendono soltanto dalla posizione. Per il moto sotto l'azione di queste forze abbiamo definito un'energia potenziale che dipende anche essa soltanto dalla posizione. La somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica, ossia l'energia meccanica, rimane invariata durante il moto, quindi l'energia meccanica si conserva. Ora esamineremo brevemente ciò che accade quando la forza che agisce su un corpo dipende anche da altre variabili.

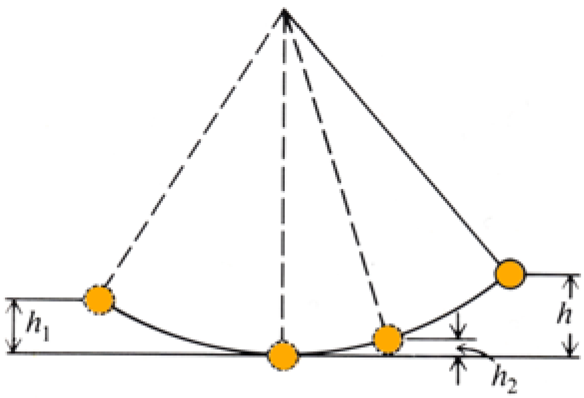

Fig. 27.21. Un pendolo reale su cui agiscono la forza di gravità e la forza di attrito. La forza di attrito riduce le altezze consecutive raggiunte dalla pallina, finché il pendolo non si arresta nel punto più basso della sua oscillazione.

La maggior parte delle forze esercitate dalle persone o dalle macchine dipendono dal tempo e non dalla posizione. Per esempio, la forza esercitata dal braccio del lanciatore su una palla da baseball agisce soltanto per un tempo brevissimo.

Un'altra palla che passi per la stessa posizione può non essere soggetta alla stessa forza. Il lavoro compiuto dalla forza agente sulla palla ne aumenta notevolmente l'energia cinetica, ma ne influenza soltanto lievemente l'energia potenziale gravitazionale. Quindi, l'energia meccanica della palla aumenta.

Quando un veicolo spaziale si muove senza propulsione nella sua orbita, la sua energia meccanica rimane costante. Quando si allontana dalla Terra, rallenta; quando si avvicina alla Terra, accelera. Ma quando il pilota accende i razzi di manovra, l'energia meccanica può aumentare o diminuire secondo che la spinta dei razzi si eserciti nella direzione orientata del moto o in quella opposta.

La situazione è piuttosto diversa quando è presente una forza di attrito. Supponiamo che un pendolo venga posto in oscillazione rispetto alla condizione di quiete a un'altezza iniziale *h* sopra il punto più basso dell'oscillazione (Fig. 27.21). In assenza di attrito il pendolo oscillerebbe avanti e indietro indefinitamente, raggiungendo sempre l'altezza iniziale. In realtà sappiamo che cosa accade; l'altezza massima a cui arriva la pallina va decrescendo continuamente finché il pendolo non si arresta nel punto più basso. In quell'istante ha perduto tutta la sua energia meccanica.

Siamo in grado di spiegare come ciò avviene. La forza di attrito dipende non dalla posizione, ma dalla direzione del moto. (L'attrito fra un solido e un gas o un liquido dipende anche dalla velocità, come abbiamo visto nel paragrafo 11.3 a pag.149.) In particolare la forza di attrito ha sempre verso opposto a quello della velocità del corpo su cui agisce. Perciò il pendolo della Fig. 27.21 raggiungerà il punto più basso della sua prima oscillazione con un'energia cinetica lievemente minore di *mgh*. Mentre il pendolo si muove verso sinistra l'attrito continua a rallentarlo, perciò raggiunge soltanto un'altezza $h_1 < h$. Quando il pendolo inverte il verso del moto, anche la forza di attrito si inverte. Ritornando verso destra il pendolo raggiunge un'altezza $h_2 < h_1$ e così via. Il caso del pendolo illustra un principio generale; l'energia meccanica di un corpo diminuisce in presenza dell'attrito.

Quando l'attrito riduce l'energia meccanica, si produce un aumento della temperatura. Vedremo più avanti che un aumento della temperatura può essere messo in relazione con un'altra forma di energia. Allora saremo in grado di sostituire il principio limitato della conservazione dell'energia meccanica con un principio generale.

27.10. Potenza.

Consideriamo ora il tempo impiegato per compiere il lavoro. Compiamo lo stesso lavoro per sollevare un corpo ad una data altezza sia che vi impieghiamo un secondo oppure un anno. Tuttavia la *rapidità con cui un lavoro è compiuto* è spesso più interessante per noi che non il lavoro totale effettuato.

Definiamo *potenza* la rapidità con cui un lavoro è fatto. La potenza media fornita da un certo sistema è il lavoro totale compiuto dal sistema diviso per il lasso di tempo impiegato, cioè

[27.75] $$P_m = \frac{L}{\Delta t} \ .$$

La potenza istantanea fornita dal sistema è

[27.76] $$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

Se la potenza è costante nel tempo $P = P_m$ e

[27.77] $$L = P \cdot \Delta t$$

Nel SI l'unità di misura della potenza è il watt (simbolo W): 1W = 1 J/s = 1 kg·m^2·s^{-3}. Questa unità di misura prende il nome da James Watt il cui motore a vapore è il predecessore dei potenti motori di oggi. Tale unità è piuttosto piccola per gli scopi pratici per cui, specie nei paesi anglosassoni, si usa il *cavallo vapore* (simbolo hp). Fu Watt stesso a suggerire come unità di potenza quella fornita da un cavallo considerato come una machina. Il cavallo vapore, fissato uguale ad un certo numero di unità pratiche del sistema britannico vale circa 746 W o circa tre quarti di chilowatt. Un cavallo non resisterebbe a lungo a questo ritmo.

Il lavoro a sua volta può essere espresso in unità di potenza per unità di tempo. Questa è l'origine del termine *chilowattora*, per esempio. Un chilowattora è il lavoro compiuto in un'ora da un sistema che lavora alla potenza costante di 1 kW. Pertanto 1 kWh = $(1\times10^3$ W$) \times (3600$ s$) = 3.6 \times 10^6$ J.

Nel caso di una forza costante **F** che compie il lavoro $L = \mathbf{F}\times\Delta\mathbf{r}$, si può scrivere la potenza come

[27.78] $$P = P_m = \frac{L}{\Delta t} = \frac{\mathbf{F}\times\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{F}\times\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{F}\times\mathbf{v} \ .$$

Quesiti

27.41. Quanto veloce dovrebbe correre un cavallo di 700 kg in salita lungo un piano inclinato di 30° rispetto all'orizzontale affinché il lavoro nell'unità di tempo fatto contro la forza di gravità assuma il valore costante di 800 W?

27.42. Un'automobile sviluppa 75 kW di potenza muovendosi di moto uniforme alla velocità costante di 100 km/h. Quanto vale la spinta (forza media) in avanti prodotta dal motore? Perché l'automobile non accelera?