

31. POTENZIALE E DIFFERENZA DI POTENZIALE

31.1. Prerequisiti

Lavoro fatto dalle forze di un campo elettrico generato da una carica puntiforme Q per spostare una carica q da un punto A ad un punto B (Fig. 31.1):

$$[31.1] \quad L_{AB} = k_{el} Qq \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = U(A) - U(B) = -\Delta U$$

dove

$$[31.2] \quad U(A) = k_{el} Qq \left(\frac{1}{r_A} \right) + c$$

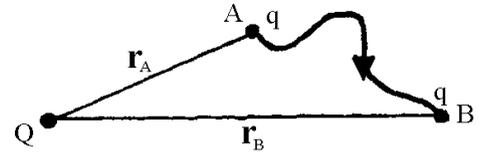


Fig. 31.1.

poiché: $L_{A\infty} = k_{el} Qq \left(\frac{1}{r_A} - 0 \right) \Rightarrow$ l'energia potenziale elettrica del sistema composto dalle due cariche Q e q poste alla distanza r l'una dall'altra, è uguale, a meno di una costante additiva c , al lavoro preso col segno che le forze del campo devono compiere per spostare la carica q dal punto A all'infinito lungo una traiettoria qualsiasi. Di norma si prende $U(\infty) = 0 + c = c = 0$.

31.2. Potenziale

Poiché il lavoro compiuto dalle forze elettriche di un campo, quando una carica q si sposta da un punto ad un altro è direttamente proporzionale alla carica q (il lavoro è direttamente proporzionale alla forza F agente su q , la quale a sua volta è direttamente proporzionale alla carica q), segue che il rapporto U/q è indipendente dalla carica q , dipendendo soltanto dal campo elettrico e dal punto che si considera:

$$[31.3] \quad \frac{U(A)}{q} = \frac{L_{A\infty}}{q} = \frac{k_{el} Qq(1/r_A)}{q} = k_{el} Q \left(\frac{1}{r_A} \right) = V_A.$$

Tale grandezza dicesi **potenziale elettrico nel punto A** e può essere $>$, $=$, $<$ 0 a seconda del segno di Q . Ovviamente anche il potenziale in un punto A di un campo elettrico è una grandezza definita a meno di una costante arbitraria. Da quanto detto il *potenziale elettrico in un punto di un campo (qualsiasi, non solo puntiforme)* è il rapporto tra il lavoro compiuto dalle forze del campo quando una carica q si sposta da quel punto all'infinito (o a terra a seconda della convenzione) lungo qualsiasi traiettoria e la carica q stessa.

Se il campo è prodotto da più cariche puntiformi Q_1, Q_2, \dots, Q_n il potenziale in un punto A è uguale alla somma algebrica dei potenziali relativi alle singole cariche $V_A = V_1 + V_2 + \dots + V_n$. Se r_1, r_2, \dots, r_n sono rispettivamente le distanze del punto A dalle cariche date, si ha:

$$[31.4] \quad V_A = k_{el} \left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} + \dots + \frac{Q_n}{r_n} \right)$$

i termini dovuti a cariche elettriche positive sono positivi, quelli dovuti a cariche negative, sono negativi; quindi se ad un sistema di n cariche Q_1, Q_2, \dots, Q_n che generano il campo, se ne aggiunge un'altra Q_{n+1} il potenziale V_A , in un punto generico A , aumenta se Q_{n+1} è positiva, diminuisce se Q_{n+1} è negativa.

Avendo introdotto il potenziale elettrico, possiamo dire che:

$$[31.5] \quad L_{A\infty} = qV_A$$

cioè il lavoro fatto dalle forze del campo elettrico per spostare una carica q da A all'infinito (cioè l'energia potenziale di q in A) è data dal prodotto della carica q per il potenziale elettrico V_A nel punto A .

Nello studio dei fenomeni elettrici, però, ciò che spesso interessa è la differenza fra i valori del potenziale in due punti A e B diversi di un campo elettrico (Fig. 31.2):

$$[31.6] \quad V_A - V_B = \frac{U(A)}{q} - \frac{U(B)}{q} = \frac{U(A) - U(B)}{q} = \frac{L_{AB}}{q}$$

da cui:

$$[31.7] \quad L_{AB} = q \cdot (V_A - V_B)$$

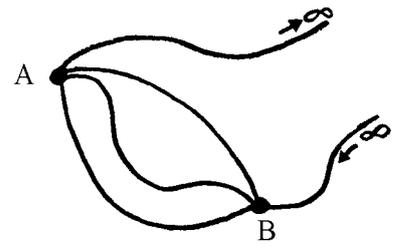


Fig. 31.2.

La differenza $V_A - V_B$ fra i valori del potenziale elettrico nei punti A e B si chiama **differenza di potenziale elettrico** o **tensione elettrica tra i punti A e B** .

Dalla relazione fondamentale [31.7] si deduce che il lavoro L_{AB} fatto dalle forze del campo quando q si sposta da un punto A ad un punto B , entrambi a distanza finita, è dato dal prodotto della carica q per la differenza di potenziale $V_A - V_B$.

Dalla [31.7] risulta che se la carica q è positiva, il lavoro L_{AB} è positivo quando $V_A - V_B > 0$; cioè le forze del campo compiono un lavoro positivo per spostare una carica positiva verso un punto del campo che abbia un potenziale minore di quello del punto in cui si trova inizialmente. Se invece la carica q è negativa, il lavoro L_{AB} è positivo quando $V_A - V_B < 0$; cioè le forze del campo compiono un lavoro positivo per spostare una carica negativa verso i punti a potenziale maggiore.

Quindi *le forze elettriche tendono a spingere le cariche positive verso i punti a potenziale minore e le cariche negative verso i punti a potenziale maggiore.*

31.3. Relazione tra il potenziale elettrico e il campo elettrico

Una domanda appropriata è questa: se, invece di conoscere il campo elettrico \mathbf{E} prodotto da un sistema di cariche, conoscessimo il potenziale V , l'informazione sarebbe la stessa? Il dubbio deriva dal fatto che V è una funzione scalare del punto, mentre \mathbf{E} è una funzione vettoriale del punto (cioè in ogni punto definita da tre componenti a loro volta funzioni scalari del punto).

A tale scopo occorre introdurre le **superfici equipotenziali**: esse sono *quelle superfici in cui tutti i punti si trovano allo stesso potenziale*.

Nel caso di un campo elettrico generato da una carica puntiforme è facile vedere che le superfici equipotenziali sono sfere concentriche di centro la carica e raggio qualsiasi (Fig. 31.3). È facile rendersi conto anche che in ogni punto tali superfici equipotenziali sono perpendicolari alle linee di forza e quindi al campo elettrico.

Ma questa è una proprietà del tutto generale, infatti per portare una carica da un punto ad un altro della stessa superficie equipotenziale non si fa lavoro in quanto $L_{AB} = q(V_A - V_B)$ e $V_A = V_B$.

Ma poiché il lavoro è definito come $L = \mathbf{F} \times \Delta \mathbf{r}$, se $L = 0$, forza e spostamento formano un angolo retto. Se $\Delta \mathbf{r}$ si trova su una superficie equipotenziale, è quindi ortogonale alla forza, ovvero al campo. In generale diremo che *le superfici equipotenziali sono ortogonali alle linee di forza*.

Risolviamo ora il problema: calcolare il vettore \mathbf{E} in un generico punto A di un campo elettrico qualsiasi di cui si conosce, in ogni punto il potenziale V_A .

A tale scopo (Fig. 31.4) si consideri la superficie equipotenziale che passa per il punto A e si indichi con V_A il suo potenziale. Già sappiamo che il vettore \mathbf{E} è perpendicolare alla superficie V_A nel punto A e che, secondo la definizione di potenziale, il vettore \mathbf{E} ha il verso che va dai punti a potenziale più alto verso quelli a potenziale più basso. Supponiamo che ciò accada, nel caso della Fig. 31.4, spostandosi obliquamente verso di noi. A questo punto dunque siamo in grado di dire quali sono la direzione e il verso del vettore \mathbf{E} nel punto A ; resta da calcolare la sua intensità E . A tale scopo ci si sposti

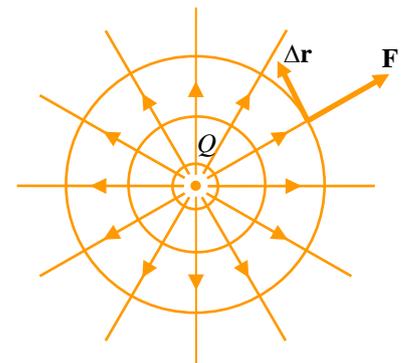


Fig. 31.3.

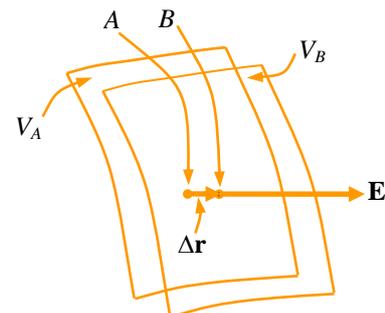


Fig. 31.4.

di un tratto Δr molto piccolo, a partire dal punto A , lungo la direzione e nel verso del vettore \mathbf{E} (già noti) fino a giungere a un punto B molto vicino ad A . Il valore del potenziale V_B in questo punto è noto per ipotesi. Allora supponiamo di calcolare il lavoro che le forze del campo compiono quando una carica q si sposta da A a B (Δr deve essere molto piccolo in modo da considerare \mathbf{E} costante):

$$[31.8] \quad L_{AB} = q \cdot E \cdot \Delta r = q(V_A - V_B)$$

da cui

$$[31.9] \quad E = \frac{V_A - V_B}{\Delta r} = -\frac{\Delta V}{\Delta r}$$

e più precisamente, passando al limite

$$[31.10] \quad E = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left(-\frac{\Delta V}{\Delta r} \right) = -\frac{dV}{dr}.$$

Le [31.9] e le [31.10] sono le relazioni cercate. Esse forniscono una proprietà generale fondamentale del campo elettrico.

Poiché nel SI dV si misura in volt e dr in metri, si usa spesso come unità di misura del campo elettrico il volt/metro ($1 \text{ V/m} = 1 \text{ N/C}$).

La conoscenza del potenziale elettrico in tutti i punti di una regione dello spazio permette di dare una risposta immediata a tre tipi di problemi:

- (1) calcolo del vettore campo elettrico \mathbf{E} in ogni punto dello spazio;
- (2) calcolo del lavoro fatto dal campo elettrico quando una carica q qualsiasi si sposta da un punto A ad un punto B (basta far uso della relazione $L_{AB} = q(V_A - V_B)$);
- (3) calcolo dell'energia potenziale di una carica q puntiforme posta in un punto di un campo elettrico ($U = q \cdot V$).

In conclusione, se si conosce il potenziale in tutti i punti di un campo elettrico, si possono dedurre con grande facilità tutte le proprietà del campo elettrico stesso. (Da ricordare che il potenziale è una funzione scalare e quindi più facile da usare rispetto ad una funzione vettoriale \mathbf{E})

Quesiti

31.1. Due placche parallele, a distanza $d = 10 \text{ cm}$, portano uniformemente distribuite, cariche di segno diverso. La loro d.d.p. è 100 V :

(a) come saranno le superfici equipotenziali e le linee di forza?

(b) una carica $Q = +10^{-4} \text{ C}$ si sposta da un punto qualsiasi della placca carica positivamente ad un punto qualsiasi dell'altra placca carica negativamente. Si può calcolare il lavoro che il campo fa sulla carica? Quale sarà il risultato di questo lavoro?

(c) quanto vale il campo tra le placche?

31.2. Un campo elettrico uniforme di 3000 N/C è orientato nella direzione negativa dell'asse x . Ponendo il potenziale sia pari a zero nell'origine, si trovi il valore del potenziale nei punti:

(a) $x = 2\text{m}$;

(b) $x = 4\text{m}$;

(c) $x = -3\text{m}$.

(d) Si tracci un grafico del potenziale V in funzione di x .

31.3. Un campo elettrico uniforme è diretto lungo l'asse z . Il piano xy è a $V = 0$. Allontanandosi verso l'alto (asse z positivo) dal piano xy , il potenziale aumenta di 15 V ogni cm . Si trovino il modulo, la direzione ed il verso del campo elettrico.

31.4. Dimostrare che le dimensioni di dV/dr sono quelle di E .

31.4. Campo e potenziale in un conduttore in equilibrio elettrostatico

Sappiamo che nei conduttori esistono alcuni elettroni, detti di conduzione, i quali hanno una certa libertà di movimento sotto l'azione di un campo elettrico. Consideriamo ora un conduttore C carico (Fig. 31.5), in equilibrio elettrostatico ed isolato, cioè lontano da altri corpi carichi in modo che la distribuzione della sua carica non subisca modificazioni.

Il campo elettrico all'interno del conduttore è nullo, ciò è conseguenza del cosiddetto effetto zero, cioè della legge di Coulomb.

Durante il processo di carica gli elettroni di conduzione ovviamente si muovono, ma, cessata la carica, essi raggiungono uno stato di equilibrio in maniera tale che il campo elettrico all'interno sia nullo.

In due punti A e B qualsiasi del conduttore il potenziale elettrico ha lo stesso valore. Infatti, essendo nullo il campo, tale è anche il lavoro L della forza elettrica del campo e quindi dalla [31.7] segue $V_A - V_B = 0$ cioè $V_A = V_B$; poiché il ragionamento può essere ripetuto per ogni coppia di punti del conduttore (anche sulla superficie, perché?), concludiamo che nel conduttore il potenziale è costante.

Ne segue in particolare che nei punti della superficie che limita il conduttore il potenziale ha lo stesso valore, cioè la superficie stessa è una superficie equipotenziale e le linee di forza sono perpendicolari ad essa, così come il campo elettrico nei punti della superficie stessa.

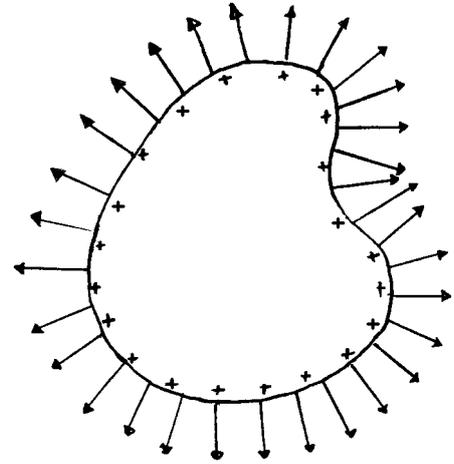


Fig. 31.5.

31.5. Potenziale di un conduttore sferico in equilibrio elettrostatico

Consideriamo un conduttore carico (Fig. 31.6), di forma sferica ed isolato. Il potenziale è costante in tutti i suoi punti, per cui possiamo riferirci ad un punto particolare che semplifichi il calcolo, il centro del conduttore.

Per il principio di sovrapposizione il potenziale V del campo generato dal conduttore è la somma dei potenziali dei campi generati da tutte le cariche distribuite sui vari elementi di superficie ΔA_i del conduttore, tanto piccoli da potersi considerare puntiformi rispetto alla distanza dal centro. Detto V_1 il potenziale del campo generato dalla carica q_1 nel centro del conduttore, si ha:

$$[31.11] \quad V_1 = k_{el} \frac{\Delta q_1}{R}.$$

In modo analogo per le altre cariche $q_2, q_3 \dots$ degli altri elementi di superficie:

$$[31.12] \quad V_2 = k_{el} \frac{\Delta q_2}{R}; \quad V_3 = k_{el} \frac{\Delta q_3}{R} \dots$$

Eseguendo la somma dei vari potenziali si ha:

$$[31.13] \quad V_O = V_1 + V_2 + \dots = k_{el} \frac{\Delta q_1}{R} + k_{el} \frac{\Delta q_2}{R} + \dots = k_{el} \frac{(\Delta q_1 + \Delta q_2 + \dots)}{R} = k_{el} \frac{Q}{R}$$

dove Q indica la carica totale del conduttore. Da notare che la densità di carica sulla sfera è uniforme.

Quesiti

31.5. Si tracci su un sistema di assi r, V il diagramma del potenziale generato da una sfera carica di raggio R_0 .

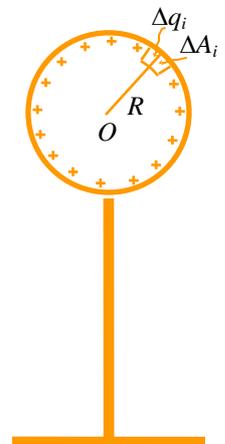


Fig. 31.6.

31.6. Quanto vale il potenziale dovuto ad una carica $Q = 0.2$ nC distribuita uniformemente su un conduttore sferico di raggio $R = 10$ cm per $r \leq R$ e per $r > R$, supponendo $V = 0$ all'infinito. Si traccino in scala le superfici equipotenziali con passi di 2 V, cominciando da $r = R$.

31.6. L'elettronvolt

Spesso ci è capitato di vedere la carica e l'energia delle singole particelle espresse con esponenti negativi grandi in valore assoluto. Per evitare di usare numeri eccessivamente grandi si adotta un'unità di misura dell'energia in cui alla carica elementare è assegnata 1 unità, mentre il volt è conservato come unità di potenziale elettrico. In questo modo viene definita una nuova unità di energia (fuori del Sistema Internazionale) detta *elettronvolt* (simbolo: eV):

$$[31.14] \quad 1 \text{ eV} = 1e \cdot 1 \text{ V}$$

dove e indica la carica fondamentale (o elementare), cioè la carica, a parte il segno, posseduta, ad esempio, da un elettrone, un positrone (l'antielettrone), un protone.

Siccome la carica elementare è uguale a 1.602×10^{-19} C e dato che $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$, si ha:

$$[31.15] \quad 1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C} \times 1 \text{ J/C} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}.$$

L'elettronvolt viene definito come l'energia guadagnata (o persa) da una particella dotata di carica fondamentale, quando viene sottoposta, nel vuoto, a una differenza di potenziale di 1 volt. Sono molto usati i suoi multipli keV, MeV, GeV, TeV

È importante notare che l'elettronvolt è un'unità di energia, non un'unità di potenziale elettrico. In questa unità un elettrone accelerato a partire dalla condizione di quiete da una differenza di potenziale di un milione di volt (10^6 V) acquisterà un'energia cinetica di 1 megaelettronvolt (1 MeV).

Quesiti

31.7. Un elettrone viene accelerato nel vuoto attraverso una differenza di potenziale di 1.5×10^6 V. Calcolare l'aumento della sua energia cinetica (a) in megaelettronvolt (MeV) e (b) in joule (J).

31.8. Determinare l'energia di ionizzazione (energia di legame) dell'atomo di idrogeno nello stato fondamentale, esprimendola in eV.

Problemi di fine capitolo

31.9. Una carica $Q = -50$ mC è situata nell'origine di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Quali sono il vettore del campo elettrico ed il potenziale elettrico nel punto $x = 4$ m, $y = 4$ m?

$$[E = 1.4 \times 10^7 \text{ V/m}; V = -7.95 \times 10^7 \text{ V}]$$

31.10. A una distanza di 100 km da un piccolo asteroide carico elettricamente si trova che c'è un campo elettrico la cui intensità è 3000 V/m. Quale carica elettrica porta l'asteroide? Se l'asteroide è una sfera di 1 km di raggio, qual è la carica riferita all'unità di area della sua superficie? (la carica è distribuita uniformemente).

31.11. Tre cariche sono disposte come in Fig. A. Qual è la loro energia potenziale, se $q = 1.0 \times 10^{-7}$ C e $a = 10$ cm? [-9.0×10^{-3} J]

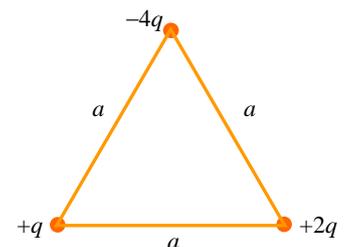


Fig. A.

31.12. Le cariche e le coordinate di due cariche poste nel piano x,y sono:

$$q_1 = +3.0 \mu\text{C}, \quad x_1 = +3.5 \text{ cm}, \quad y_1 = +0.5 \text{ cm};$$

$$q_2 = -4.0 \mu\text{C}, \quad x_2 = -2.0 \text{ cm}, \quad y_2 = +1.5 \text{ cm}.$$

(a) Determinare il potenziale elettrico nell'origine.

(b) Determinare quale lavoro si deve compiere per riportare queste cariche nelle posizioni di partenza, partendo dall'infinito?

- 31.13.** In una certa posizione dello spazio il potenziale elettrico è $V = +20$ kV. In questo punto qual è l'energia potenziale (a) di un elettrone, (b) di un protone?
- 31.14.** Due punti A e B hanno potenziali elettrici di $+2$ kV e -3 kV, rispettivamente. Quanto lavoro si deve compiere per spostare un elettrone da A a B ? È necessaria la stessa quantità di lavoro per spostare un protone da A a B ?
- 31.15.** Una particella ha una carica $+Q$ ed è tenuta fissa nel punto P . Una seconda particella di massa m e carica $-q$ descrive a velocità costante una traiettoria circolare di raggio r_1 e centro P . Si ricavi l'espressione del lavoro L che un agente esterno deve compiere sulla seconda particella per portare il raggio della traiettoria circolare da r_1 a r_2 (con $r_2 > r_1$).
- 31.16.** Quale deve essere il valore di una carica puntiforme positiva isolata affinché il potenziale elettrico a 10 cm da essa sia $+100$ V? [1.1 nC]
- 31.17.** Nell'esperimento delle gocce d'olio di Millikan si ha un campo elettrico di 1.92×10^5 N/C tra le due armature distanti 1.50 cm l'una dall'altra. Trovare la d.d.p. tra le armature. [2.90 kV]
- 31.18.** Nella Fig. B individuare i punti
(a) dove $V = 0$; (b) dove $\mathbf{E} = \mathbf{0}$.
(Considerare solamente i punti sulla direzione le due cariche e scegliere $d = 1.0$ m.)
- 

Fig. B.
- 31.19.** Quale velocità raggiungerà un elettrone accelerato attraverso una d.d.p. di 120 V partendo dalla quiete? [6.50×10^6 m/s]
- 31.20.** Due lamine conduttrici parallele sono separate da una distanza di 2 cm. Fra le lamine viene applicata una d.d.p. di 600 V mediante una batteria. A quale forza elettrica sarà soggetta nel campo elettrico fra le lamine una gocciolina d'olio che porta una carica di $4e$?
- 31.21.** Due lamine conduttrici parallele sono separate da un intervallo d'aria di 4 cm. Quale tensione si deve applicare tra le lamine per produrre un campo elettrico di intensità di 2 kV/m? [80 V].
- 31.22.** Qual è il potenziale elettrico in un punto lontano 5 m da due cariche di $+3$ μ C ciascuna? La distanza tra le due cariche è di 8 m.
Supponiamo che una carica di $+2\mu$ C con una massa di 2 kg sia situata in un punto lontano 5 m dalle due cariche. Inizialmente la carica è in quiete. Quando essa viene lasciata libera, viene respinta dalle due cariche di $+3$ μ C e si allontana con una velocità sempre crescente. A quale valore limite tenderà la velocità? [1.08×10^4 V; 0.15 m/s]
- 31.23.** Qual è il potenziale elettrico sulla superficie di un nucleo d'oro? Il raggio è 6.2×10^{-15} m ed il numero atomico Z è 79 . Si supponga il nucleo a simmetria sferica. [18 MV]
- 31.24.** Una sfera di 1 m di raggio porta una carica elettrica superficiale uniforme di 10^{-6} C/m². Quali sono l'intensità del campo elettrico e il potenziale elettrico sulla superficie della sfera? A 1 m sopra la superficie della sfera? [1.13×10^5 V/m; 1.13×10^5 V; 2.82×10^4 V/m; 5.65×10^4 V]
- 31.25.** Una sfera metallica di raggio 15 cm porta una carica di 3.0×10^{-8} C:
(a) qual è il campo elettrico sulla superficie della sfera?
(b) qual è il potenziale elettrico sulla superficie della sfera?
(c) a quale distanza dalla superficie della sfera il potenziale elettrico è diminuito di 500 V?
- 31.26.** Per semplice strofinio si può produrre una carica di 10^{-8} C. Con tale carica, a quale potenziale si porterebbe una sfera conduttrice isolata il cui raggio misuri 10 cm? [900 V]