28. MOMENTO ANGOLARE

APPENDICE 2

PRODOTTO VETTORIALE DI DUE VETTORI

Consideriamo ora un'altra importante operazione che associa ad una coppia di vettori un altro vettore. Tale operazione si chiama prodotto vettoriale di **a**, **b** e si indica con $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ (da leggersi "**a** vettore **b**").

Il vettore $\mathbf{c} = \mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ è definito da un modulo, una direzione ed un verso così determinati:

I) modulo espresso da: $|\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = c = ab\cdot\sin\theta$ dove θ è l'angolo fra i due vettori;

II) direzione di $\mathbf{c}=\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ perpendicolare al piano individuato da **a** e **b;**

III) per specificare il verso del vettore $\mathbf{c}=\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ facciamo riferimento alle Fig. A2.1 e Fig. A2.2.

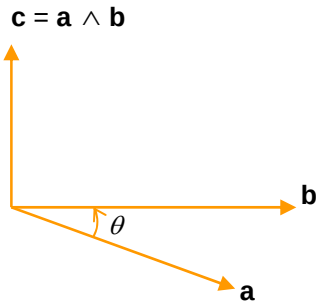


Fig. A2.1.

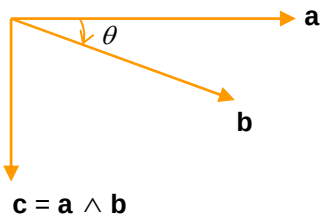


Fig. A2.2.

Se uno dei due vettori è zero converremo che

$$\mathbf{0}\wedge\mathbf{b} = \mathbf{a}\wedge\mathbf{0} = \mathbf{0}. \qquad [A2.1]$$

Ci sono molti modi per determinare il verso di $\mathbf{c} = \mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$, fra i più diffusi è il seguente. Si tratta di immaginare un asse perpendicolare al piano individuato da **a** e **b**, applicato nell'origine comune. Si dispongano ora le dita della mano destra intorno a questo asse e si porti il vettore **a** sopra il vettore **b** ruotando nel senso dell'angolo più piccolo da essi formato con le dita piegate e mantenendo il pollice eretto: la orientazione del pollice fornisce allora direzione e verso del vettore prodotto $\mathbf{c} = \mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$.

Il prodotto vettoriale gode delle seguenti proprietà fondamentali:

1) $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = -\mathbf{b}\wedge\mathbf{a}$ (proprietà anticommutativa) [A2.2]

2) $(h\mathbf{a})\wedge\mathbf{b} = \mathbf{a}\wedge(h\mathbf{b}) = h(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})$ (con h un numero reale (*scalare*) qualsiasi) [A2.3]

3) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\wedge\mathbf{c} = \mathbf{a}\wedge\mathbf{c} + \mathbf{b}\wedge\mathbf{c}$ (proprietà distributiva rispetto all'addizione) [A2.4]

Se $\theta = 90°$ allora **a**, **b** e $\mathbf{c} = \mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ formano tutti angoli retti uno rispetto all'altro e forniscono le direzioni di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali.

Al contrario di quello che avviene per il prodotto scalare, il prodotto vettoriale ha valore massimo quando **a** e **b** sono perpendicolari tra loro, mentre è zero quando i due vettori sono paralleli tra loro.

Nel caso dei versori di un sistema di assi ortogonali è facile vedere che:

$\mathbf{i}\wedge\mathbf{i} = \mathbf{j}\wedge\mathbf{j} = \mathbf{k}\wedge\mathbf{k} = \mathbf{0}$ (con **k** versore dell'asse z) [A2.5]

$\mathbf{i}\wedge\mathbf{j} = \mathbf{k}$ $\quad \mathbf{k}\wedge\mathbf{i} = \mathbf{j}$ $\quad \mathbf{j}\wedge\mathbf{k} = \mathbf{i}$. [A2.6]

Da un punto di vista analitico, conoscendo le coordinate dei vettori:

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} \qquad \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} \qquad [A2.7]$$

si ha che:

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}) \wedge (b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}) = a_xb_x\mathbf{i}\wedge\mathbf{i} + a_xb_y\mathbf{i}\wedge\mathbf{j} + a_yb_x\mathbf{j}\wedge\mathbf{i} + a_yb_y\mathbf{j}\wedge\mathbf{j} =$$

$$= a_xb_y\mathbf{k} - a_yb_x\mathbf{k} = (a_xb_y - a_yb_x)\mathbf{k} \qquad [A2.8]$$

ESEMPIO: Nella Fisica si incontra spesso il prodotto vettoriale; ad esempio consideriamo un oggetto che ruota attorno ad un asse, e in un tempo Δt si muova di un angolo $\Delta\theta$. Chiamiamo velocità angolare (media) il rapporto $\Delta\theta/\Delta t$ e lo indichiamo con ω. È comodo vedere la velocità angolare come un vettore, quindi assegnarle una direzione; che naturalmente è quella dell'asse di rotazione. Supponiamo di voler conoscere la velocità di un punto P dell'oggetto che ruota (Fig. A2.3). Questa velocità dipende da $\boldsymbol{\omega}$, ma dipende anche dalla distanza del punto dall'asse. Chiamiamo **r** il vettore che rappresenta tale distanza. La velocità **v** ha modulo ωr e direzione perpendicolare sia ad $\boldsymbol{\omega}$ che a **r**. Possiamo quindi scrivere $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}$.

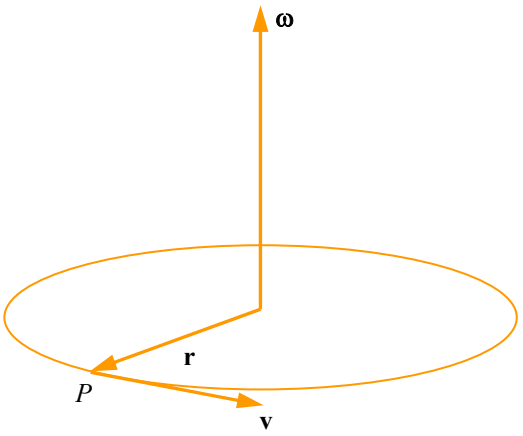


Fig. A2.3.

Quesiti

A2.1. Dimostrare che, dati due vettori **a** e **b** qualsiasi, il modulo del prodotto $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ rappresenta l'area del parallelogramma che ha per lati **a** e **b**. Considerate che cosa avviene in alcuni casi particolari.
[Quando i due vettori sono paralleli, il loro prodotto vettore è zero; se sono perpendicolari il prodotto vettore è massimo: il parallelogramma in questo caso diventa un rettangolo]

A2.2. Dati i due vettori $\mathbf{A} = 3.0\mathbf{i} + 5.0\mathbf{j}$ e $\mathbf{B} = -2.9\mathbf{i} + 4.0\mathbf{j}$ determinare:

$\mathbf{A}\wedge\mathbf{B}$, $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$, $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\wedge\mathbf{B}$.

28.1. Momento di una forza (o momento motore)

Applicando una forza alla maniglia di una porta, si può aprire o chiudere la porta, cioè si può determinare una rotazione della porta intorno all'asse delle cerniere (Fig. 28.1*a*). Ma se si applica la stessa forza in modo tale che il vettore forza *attraversi* l'asse delle cerniere, non può esserci rotazione (Fig. 28.1*b*). Una forza che è applicata «fuori centro» e che perciò può determinare una rotazione produce una grandezza vettoriale detta *momento della forza* o *momento motore* .

Il *momento della forza* **M** è una grandezza definita come:

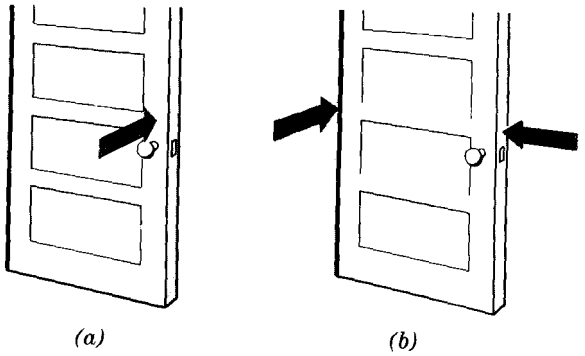


Fig. 28.1. (*a*) La forza applicata determina la rotazione della porta intorno all'asse delle cerniere. (*b*) Ciascuna delle forze applicate passa per l'asse delle cerniere e quindi non determina la rotazione della porta.

[28.1] $$\mathbf{M} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}$$

dove **r** è il vettore distanza fra il punto di applicazione della forza e il centro di rotazione (polo).

La direzione vettore **M** è perpendicolare al piano individuato dal polo e dalla retta d'azione della forza; il suo verso è determinato dalla regola della mano destra; il modulo del momento di una forza è il prodotto della distanza fra il punto di applicazione della forza e il centro di rotazione (*polo*) per il modulo del componente della forza perpendicolare a questa distanza.

Nella figura 28.2*a*, la forza **F** è applicata nel punto *A*, il quale si trova a una distanza *r* dal centro di rotazione (*polo*). Il vettore forza è perpendicolare alla retta *AB* e perciò l'intera forza è efficace nel produrre il momento della forza, il cui modulo è dato da

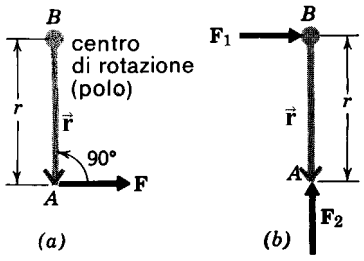


Fig. 28.2. (*a*) Il modulo del momento della forza è $M = r \cdot F$. (*b*) La retta d'azione della forza $\mathbf{F}_1$ passa per il centro di rotazione (*polo*) e quindi , essendo **r=0**, il momento della forza è nullo. La forza $\mathbf{F}_2$ non ha un componente perpendicolare alla retta *AB* e quindi il suo momento è nullo.

[28.2] $$M = r \cdot F$$

Nella figura 28.2*b*, né $\mathbf{F}_1$ né $\mathbf{F}_2$ possono produrre un momento di forza rispetto al punto *B*.

Se la forza è applicata sotto un certo angolo rispetto alla retta *AB*, come nella Fig. 28.3, solo la componente perpendicolare della forza, di modulo $F_\perp$, può contribuire al modulo del momento della forza e si ha

[28.3] $$M = r \cdot F_\perp$$

ossia, essendo $F_\perp = F \cdot \sin\theta$,

[28.4] $$M = r \cdot F \cdot \sin\theta .$$

[È chiaro che l'altro componente della forza, di modulo $F_{||}$, non può produrre rotazione, poiché la sua direzione passa per il centro di rotazione (*polo*).]

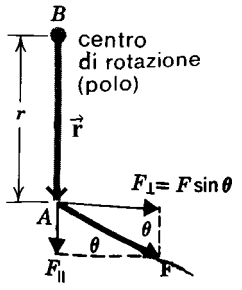


Fig. 28.3. Il modulo del momento della forza è $M = r \cdot F \cdot \sin\theta$, dove θ è l'angolo compreso fra la retta d'azione di **F** e la retta passante per il centro di rotazione (polo) e per il punto di applicazione della forza.

Non è necessario che esista realmente un centro di rotazione (polo) perché sia presente un momento di forza. La Fig. 28.4 rappresenta una tavola appoggiata su due sostegni. Per calcolare il momento della forza si può scegliere come «centro di rotazione» (polo) la posizione dell'uno o dell'altro sostegno (cioè, o il punto *A* o il punto *B*). In realtà, si può persino calcolare il momento della forza rispetto al punto *C*, un punto che non è associato con la tavola. Perciò, per il momento della forza *F*, si può scrivere:

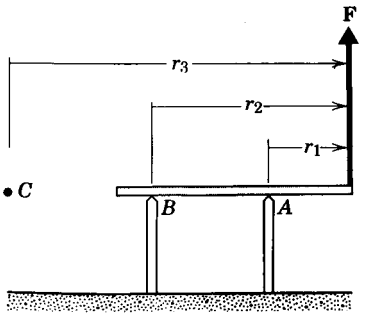


Fig. 28.4 Il momento della forza **F** esercitato sulla tavola può essere calcolato rispetto a qualsiasi punto (polo), quale *A*, *B* o *C*.

momento della forza **F** rispetto al punto *A*: $\mathbf{M}_1 = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}$

momento della forza **F** rispetto al punto *B*: $\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}$

momento della forza **F** rispetto al punto *C*: $\mathbf{M}_3 = \mathbf{r}_3 \wedge \mathbf{F}$

Nella trattazione di un particolare problema, una di queste espressioni potrebbe dimostrarsi più utile delle altre.

28.2. Conservazione del momento della quantità di moto (o momento angolare)

Dalle leggi della dinamica di Newton è stato ricavato l'importante risultato che, se la risultante di tutte le forze esterne agenti su un punto materiale è nulla, la quantità di moto totale si conserva, cioè rimane costante. Se il risultante dei *momenti delle forze* esterne agenti su un punto materiale è nullo, si ricava un altro importante principio (o legge) di conservazione, la cui importanza è pari a quella della conservazione della quantità di moto. Per enunciare questo nuovo principio di conservazione, bisogna definire una grandezza vettoriale chiamata *momento della quantità di moto* (inglese: (*linear*) *momentum*) o *momento angolare* (inglese: *angular momentum*) che, per un punto materiale, è, in valore, il prodotto della distanza fra il punto materiale e il polo (centro di rotazione) per la componente della quantità di moto secondo una direzione perpendicolare alla congiungente il polo e il punto materiale, come è illustrato nella Fig. 28.5. Il momento della quantità di moto o momento angolare è denotato generalmente con il simbolo **L**:

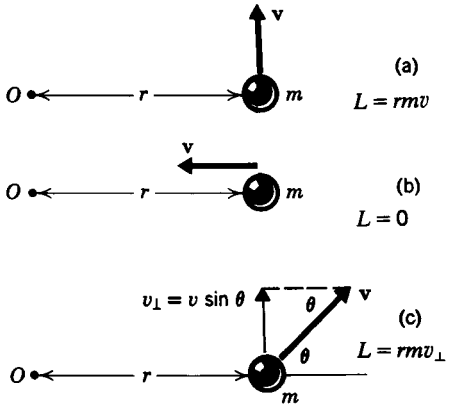


Fig. 28.5. Tre differenti casi di *momento della quantità di moto* (o *momento angolare*) **L** rispetto al punto *O*.

[28.5] $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$

Il suo modulo è dato da

[28.6] $L = r \cdot p_\perp = r \cdot m \cdot v_\perp = r \cdot m \cdot v \cdot \sin\theta$

dove θ è l'angolo compreso fra **p** (o **v)** e la congiungente il polo *O* e *m*; quindi, $v_\perp = v \sin\theta$, come nella Fig.28.5*c*.

Poiché il modulo della *velocità lineare* **v** è uguale al prodotto del modulo di **r** per il modulo della *velocità angolare* **ω**, si può usare $v = \omega \cdot r$ per esprimere il modulo del momento della quantità di moto:

[28.7] $L = mr^2\omega \cdot \sin\theta$

Con riferimento al momento della quantità di moto così definito per un punto materiale, si può enunciare una legge generale (di cui viene qui omessa la dimostrazione): *se il momento risultante delle forze esterne applicate ad un pu*nto *materiale* o a un *sistema di punti materiali è nullo*, *il momento della quantità di moto (o momento angolare) rimane costante*. Esso è l'enunciato del principio (o legge) di *conservazione del momento della quantità di* moto (o *momento angolare*).

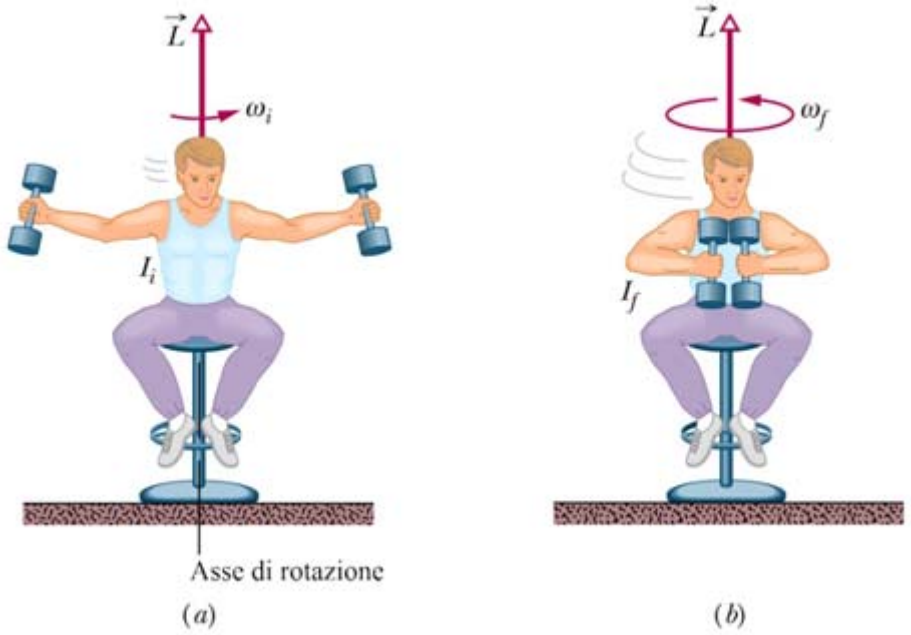


Fig. 28.6. (*a*) Uno studente viene posto in rotazione su uno sgabello con il sedile girevole mentre tiene due massicci manubri con le braccia tese. (*b*) Quando egli avvicina i manubri al proprio corpo, *r* diminuisce e di conseguenza la velocità angolare ω deve aumentare, per conservare il momento della quantità di moto **L**.

Si tratta di un principio fisico stabilito con sicurezza, di cui non si conoscono eccezioni o contraddizioni. Un esempio di conservazione del momento della quantità di moto è illustrato nella Fig. 28.6.

Come la *forza* agente su un corpo è uguale alla rapidità di variazione della *quantità di moto* rispetto al tempo

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}, \qquad [28.8]$$

o meglio

$$\mathbf{F} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}, \qquad [28.9]$$

così il *momento della forza* è uguale alla rapidità di variazione del *momento della quantità di moto* (o momento angolare) rispetto al tempo:

$$\mathbf{M} = \frac{\Delta \mathbf{L}}{\Delta t}, \qquad [28.10]$$

o meglio

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{L}}{\Delta t}. \qquad [28.11]$$

La [28.9] e la [28.11] prendono rispettivamente il nome di *prima* e *seconda equazione cardinale della meccanica* e permettono di studiare il moto *rototraslatorio* di un corpo o di un sistema di corpi.

Per un sistema di corpi, quando calcoliamo i vettori **M** e **L** rispetto a un punto qualsiasi (un polo generico), questo si muoverà in modo complicato mentre il corpo o il sistema di particelle traslano, ruotano o variano la loro configurazione, facendo così perdere validità alla [28.11]. Tuttavia, se il polo è scelto coincidente con il centro di massa del sistema, la [28.11] è ancora valida. È questa un'altra proprietà notevole del centro di massa. È possibile quindi separare in generale il moto di un sistema di punti materiali in un *moto traslatorio* del suo centro di massa (governato dalla [28.9]) e in *un moto rotatorio* attorno al suo centro di massa (controllato dalla [28.11]).

Il principio di conservazione del momento della quantità di moto deriva direttamente dalla [28.10] (o meglio dalla [28.11]) poiché, se **M** = **0**, **L** non varia nel tempo.

Il momento della quantità di moto è una grandezza ben definita anche se il punto materiale non descrive una traiettoria curva. Per esempio, nella Fig. 28.5, se la massa *m* si muove di moto rettilineo

uniforme, il momento angolare rispetto al punto *O* si conserva (in assenza di un qualsiasi momento di forza esterno).

ESEMPIO 1

Una sfera di massa $m = 100$ g $= 0.1$ kg (Fig. 28.7) è attaccata all'estremità di un filo ed è fatta ruotare lungo una traiettoria circolare di raggio 4 m, con una velocità lineare costante di 2 m/s. Mentre la sfera è in rotazione, il filo viene accorciato fino a 2 m. Qual è la variazione della velocità e del periodo del moto?

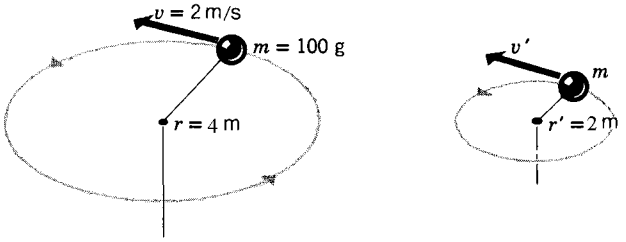


Fig. 28.7.

Il modulo del momento della quantità di moto iniziale è:

$$L = mvr = (0.1 \text{ kg})\times(2 \text{ m/s})\times(4 \text{ m}) = 0.8 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

Il periodo iniziale è:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{v/r} = \frac{2\pi r}{v} = 12.56 \text{ s}$$

L'accorciamento del filo *non* applica alcun momento di forza alla sfera poiché la forza applicata giace lungo la congiungente la sfera e il centro di rotazione (polo). Perciò, il momento della quantità di moto finale è uguale al momento della quantità di moto iniziale:

$$\mathbf{L}' = \mathbf{L} \quad \Rightarrow \quad L' = L \quad \Rightarrow \quad mv'r' = mvr$$

Quindi, la velocità finale è: $v' = \dfrac{r}{r'} v = 4 \text{ m/s}$.

Il nuovo periodo è: $T' = \dfrac{2\pi r'}{v'} = 3.14 \text{ s}$

Perciò, una diminuzione del raggio secondo un fattore 2 ha aumentato la velocità lineare secondo lo stesso fattore, ma ha diminuito il periodo secondo un fattore 4.

Esercizio: Esprimere il rapporto T'/T in funzione del rapporto r'/r.

ESEMPIO 2

Un satellite di massa *m* (Fig. 28.8) ruota intorno alla Terra descrivendo la traiettoria disegnata nella figura (la traiettoria, in realtà, è un'ellisse). Quale velocità orbitale istantanea è maggiore, v_1 (nel punto *P*) o v_2 (nel punto *A*)?

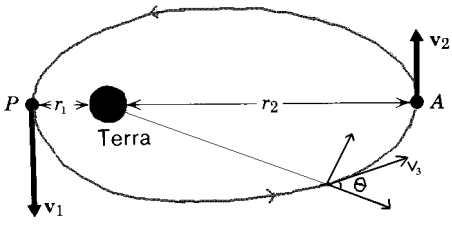


Fig. 28.8.

Se si considera la Terra un corpo fisso e si trascura l'influenza del Sole e degli altri pianeti, il momento della quantità di moto del satellite rispetto alla Terra è costante. Perciò,

$$mv_1r_1 = mv_2r_2 = mv_3r_3\cdot\sin\theta \,.$$

Poiché $r_1 < r_2$, deve essere $v_1 > v_2$. La velocità è massima quando il satellite si trova alla minima distanza dalla Terra; questo punto si chiama *perigeo* dell'orbita (ed è indicato con *P* in Fig.28.8). La velocità è minima nel punto più distante dalla Terra, chiamato *apogeo* dell'orbita (e indicato con *A* in Fig.28.8).

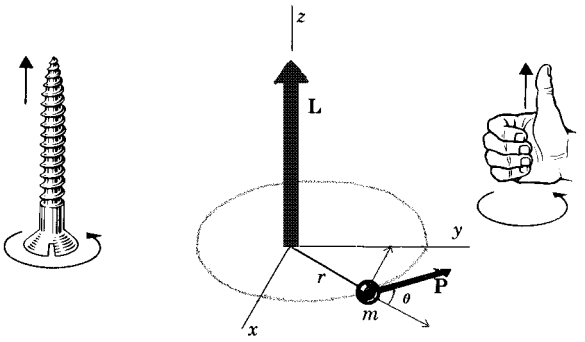


Fig. 28.9. La direzione e il verso (cioè, l'orientamento) del vettore momento della quantità di moto (o momento angolare) coincidono con la direzione e il verso di avanzamento di una vite destrorsa che gira nello stesso verso in cui si muove il punto materiale; oppure, se si avvolgono le dita della mano destra nello stesso verso in cui si muove il punto materiale, il pollice è orientato come **L**.

28.3. Orientamento del momento della quantità di moto (o momento angolare)

Il momento della quantità di moto o momento angolare è, come si è detto, una grandezza *vettoriale*. Il *modulo* del vettore momento della quantità di moto è già stato definito; *l'orientamento* (direzione e verso) può essere definito nella maniera seguente (Fig. 28.9). Se un punto materiale descrive una traiettoria circolare intorno a un certo punto (polo), la direzione del vettore momento della quantità di moto è *perpendicolare al piano del moto*. In un sistema di coordinate *x*, *y*, *z*, un punto materiale che si muove nel piano *xy* intorno all'origine ha un vettore momento della quantità di moto la cui direzione giace lungo l'asse *z*. Il *verso* del vettore momento della quantità di moto è quello in cui avanzerebbe una vite destrorsa se girasse nello stesso verso in cui ruota il punto materiale. Alternativamente, se le dita della mano destra vengono piegate nel verso in cui si muove il punto materiale, il pollice è rivolto nel verso di **L**.

La conservazione del momento della quantità di moto è importante nella teoria del moto dei pianeti intorno al Sole (e in tutti gli analoghi problemi gravitazionali riguardanti le orbite). Si consideri il moto della Terra. La forza gravitazionale esercitata sulla Terra dal Sole agisce lungo la congiungente Terra-Sole. Di conseguenza, sulla Terra non agisce un momento di forza dovuto all'attrazione gravitazionale del Sole e il momento della quantità di moto della Terra nel suo moto intorno al Sole deve rimanere costante. Cioè, il vettore momento della quantità di moto della Terra ha un orientamento fisso nello spazio e non può variare né in modulo né in orientamento. Questo fatto ha due importanti conseguenze.

(1) Poiché **L** è costante in modulo, il prodotto $rv\cdot\sin\theta$ per la Terra è costante (*m* è costante); come nell'Esempio 2, la velocità orbitale della Terra è massima quando essa si trova alla minima distanza dal Sole (*perielio*) ed è minima quando essa si trova alla massima distanza dal Sole (*afelio*). (La distanza massima e la distanza minima differiscono di solo circa il 3%, e quindi la Terra si muove con *r* e *v* sostanzialmente costanti.)

(2) Poiché l'orientamento di **L** è costante, la Terra si muove sempre nello stesso *piano*.

Se un sistema è costituito da due o più punti materiali, il momento della quantità di moto del sistema è la somma vettoriale dei momenti delle quantità di moto dei singoli punti materiali.

28.4. Moto dei corpi rigidi

Finora il nostro studio del moto dei corpi soggetti all'influenza di varie forze si è limitato a situazioni nelle quali il corpo poteva essere trattato come un *punto materiale*. Vi ricorderete (paragrafo 9.1 a pag.114) che questa semplificazione è possibile quando le dimensioni del corpo sono piccole paragonate con quelle della traiettoria lungo la quale avviene il moto.

Estenderemo ora lo studio della cinematica e della dinamica a situazioni nelle quali il corpo in moto non può più essere considerato puntiforme. Consideriamo il moto di un ghepardo (Fig. 28.10); senza osservare che il ghepardo contrae e distende il corpo mentre corre, non potremmo capire come possa raggiungere le alte velocità per le quali è famoso. Un altro esempio è fornito dal moto della chiave inglese della Fig. 28.11. Se si osserva solo il moto del centro di massa (la crocetta nera), si ha una descrizione del moto poco precisa.

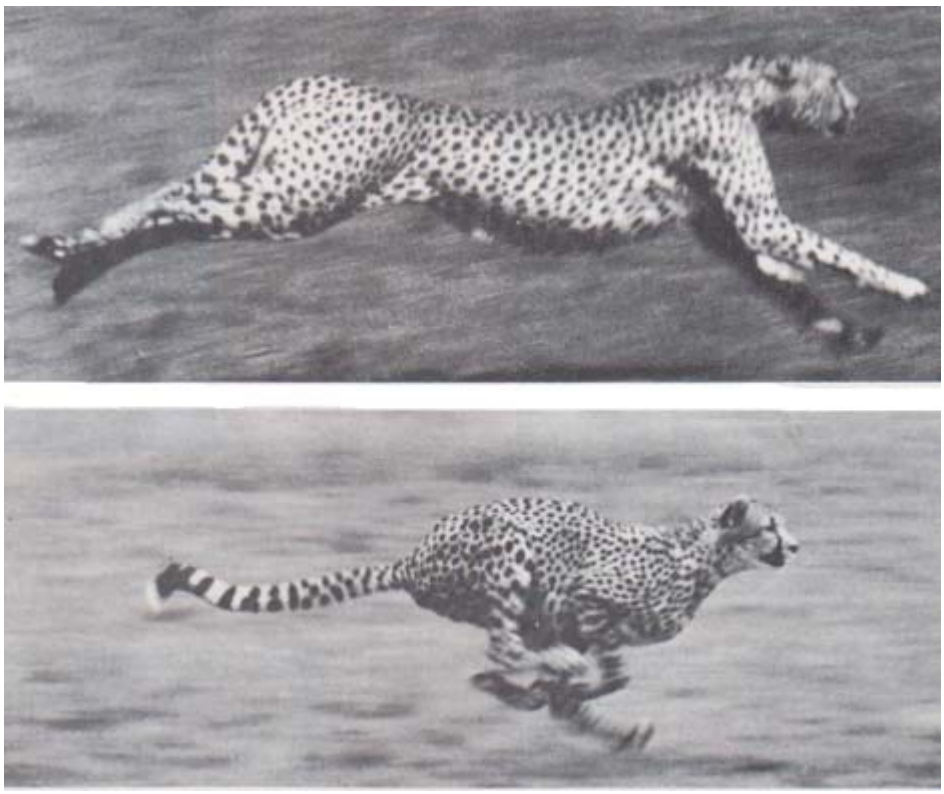


Fig. 28.10. Un ghepardo che corre, mostrato nella sua forma più allungata e in quella più contratta.

Una corretta descrizione del moto del ghepardo e della chiave inglese è basata su un'attenta osservazione delle diverse parti di ciascuno dei due corpi. Comunque c'è una differenza fondamentale tra i due casi. Quando il ghepardo corre, la sua forma, o meglio la distanza tra parti diverse come le zampe davanti e quelle di dietro, cambia. Se confrontiamo il moto del ghepardo col moto della chiave inglese nella Fig. 28.11, vediamo che la forma della chiave non cambia durante il moto e che la distanza tra due punti qualsiasi rimane costante.

Un corpo per il quale valgono le considerazioni fatte per la chiave inglese, si chiama *corpo rigido*.

Ovviamente nessun oggetto è rigido in qualsiasi circostanza; anche una chiave di acciaio si può deformare o addirittura rompere se viene sottoposta a una forza sufficientemente adeguata. Proprio come nel caso in cui si considerano oggetti reali come punti materiali, bisogna esercitare la propria capacità di giudizio correttamente quando un corpo realmente esistente viene trattato come un corpo rigido.

Per lo studio del moto di un corpo rigido si dovrà procedere come detto nel paragrafo 28.2 e, cioè, considerare sia il moto di traslazione del centro di massa del corpo sia il moto di rotazione del corpo stesso attorno al suo centro di massa.

28.5. Energia cinetica rotazionale e momento d'inerzia

In un corpo rigido le particelle del sistema mantengono fisse le loro reciproche posizioni. Nello studio della rotazione di un corpo rigido, considereremo dapprima il caso particolare nel quale l'asse di rotazione è fisso rispetto ad un sistema di riferimento inerziale. Una mola o il rotore di una turbina sono due semplici esempi.

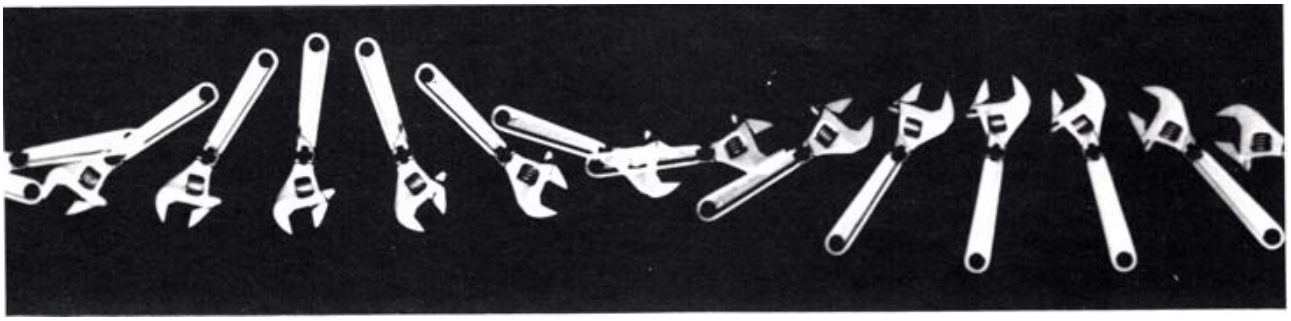


Fig. 28.11. Cronofotografia (intervallo di tempo tra due lampi consecutivi pari a 1/30 s) di una chiave per dadi in moto. La crocetta nera indica il centro di massa.

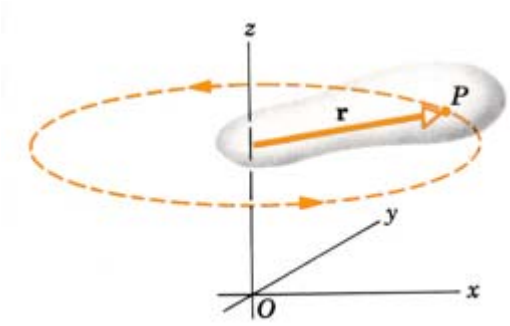


Fig. 28.12. Un corpo rigido in rotazione attorno all'asse *z*. Ogni punto del corpo, come *P*, descrive una circonferenza attorno a tale asse.

Consideriamo un corpo rigido che ruota con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ attorno a un asse fisso in un particolare sistema di riferimento inerziale, come in Fig. 28.12. Ciascuna particella di un tale corpo in rotazione possiede una certa energia cinetica. Una particella di massa m a una distanza r dall'asse di rotazione ha una velocità lineare di intensità $v = \omega r$, essendo ω il modulo della velocità angolare. La sua energia cinetica è perciò

[28.12] $$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 .$$

L'energia cinetica totale del corpo è la somma delle energie cinetiche di tutte le particelle di cui è composto.

Se il corpo è rigido, come supponiamo, ω è la stessa per tutte le particelle. Allora, l'energia cinetica totale T del corpo in rotazione vale

[28.13] $$T = \frac{1}{2}\left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2$$

Il termine $\sum_i m_i r_i^2$ è la somma dei prodotti delle masse delle particelle per i quadrati delle rispettive distanze dall'asse di rotazione; indichiamo questa grandezza con I, cioè

[28.14] $$I = \sum_i m_i\, r_i^2$$

Essa prende il nome di *momento d'inerzia* del corpo rispetto a quel particolare asse di rotazione.

Si noti che il momento d'inerzia di un corpo dipende dall'asse di rotazione oltre che dalla forma del corpo e dalla distribuzione delle masse nel corpo stesso. Il momento d'inerzia ha dimensioni $[M \cdot L^2]$ e la sua unità di misura è quindi espressa in $kg \cdot m^2$. Nel calcolo di I bisogna sempre aver chiaro in mente che il termine r_i che compare nella [28.14] è la distanza perpendicolare all'asse di rotazione della i-sima particella; non è la distanza radiale della particella dall'origine di un sistema di coordinate. L'energia cinetica T di un corpo rigido in rotazione, introducendo il momento d'inerzia, può essere scritta

[28.15] $$T = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Questa espressione è analoga alla $T = \frac{1}{2}Mv^2$, che esprime l'energia cinetica di un corpo in moto traslatorio.

Nel caso delle rotazioni la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ è l'analogo della velocità lineare $\mathbf{v}$. Ora vediamo che il momento d'inerzia I è l'analogo della massa, o inerzia traslazionale, M. Si noti però che, mentre la massa di un corpo non dipende dalla posizione del corpo, I dipende invece dal particolare asse attorno a cui avviene la rotazione.

Non si deve dimenticare comunque che l'energia cinetica rotazionale data dalla [28.15] è semplicemente la somma delle energie cinetiche di traslazione ordinarie delle singole parti del corpo. L'energia cinetica rotazionale è solo un modo più conveniente per esprimere l'energia cinetica di un corpo rigido in moto rotatorio.

Nel caso di un corpo che anziché essere costituito di masse puntiformi distinte sia una distribuzione continua di materia, l'operazione di somma che compare nella $I = \sum_i m_i\, r_i^2$ diviene una integrazione. Si immagini il corpo suddiviso in masse infinitesime dm e si consideri la distanza r fra tali masse elementari e l'asse di rotazione. Allora il momento d'inerzia è

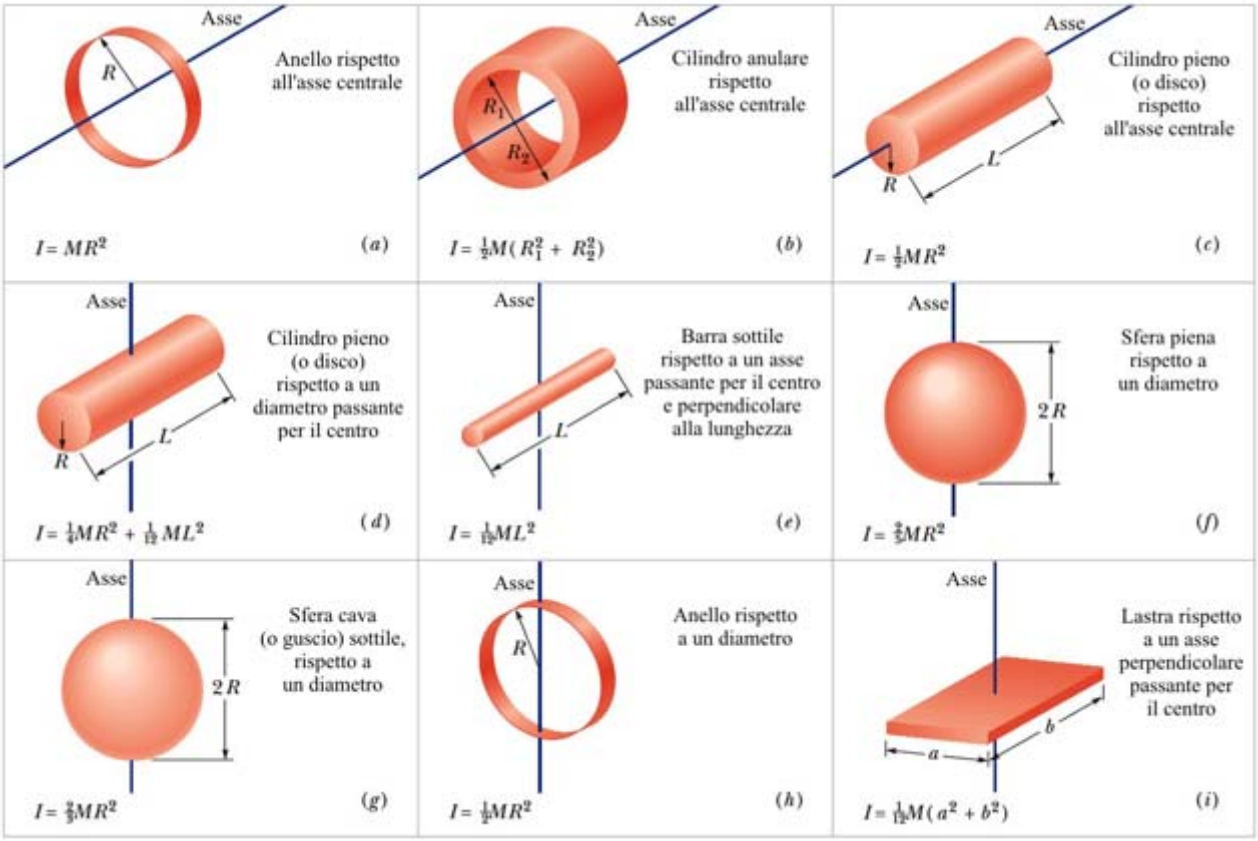
[28.16] $$I = \int r^2 dm$$

e l'integrale si estende all'intero corpo.

Nel caso di corpi di forma irregolare il calcolo degli integrali può essere alquanto difficile, mentre invece tale calcolo può essere relativamente semplice se il corpo possiede una forma geometricamente regolare e l'asse di rotazione coincide con l'asse di simmetria.

In Tabella 28.1 sono indicate le espressioni del momento d'inerzia per alcuni solidi di forma comune (di densità costante) rispetto a certi assi. Tali espressioni sono state ricavate mediante integrazione e in ogni equazione $M = \int dm$ è la massa totale del corpo.

Tabella 28.1. Alcuni momenti d'inerzia.



Esiste una semplice e utile relazione fra il momento d'inerzia I di un corpo rispetto a un asse qualunque e il momento d'inerzia I_{cm} rispetto a un asse parallelo e passante per il centro di massa. Se M è la massa totale del corpo e h la distanza fra questi due assi paralleli, la relazione è

[28.17] $$I = I_{cm} + Mh^2 .$$

La dimostrazione di questa relazione, detta anche *teorema degli assi paralleli* o *teorema di Steiner* è la seguente. Sia O il centro di massa di un corpo di forma qualunque rappresentato in sezione in Fig. 28.13. Facciamo coincidere O con l'origine delle coordinate. Consideriamo ora un asse passante per O e perpendicolare al piano della figura e un altro asse parallelo a questo passante per il punto P di coordinate $x=a$, $y=b$ e $z=0$. La distanza fra questi due assi è $h = \sqrt{a^2 + b^2}$. Allora il

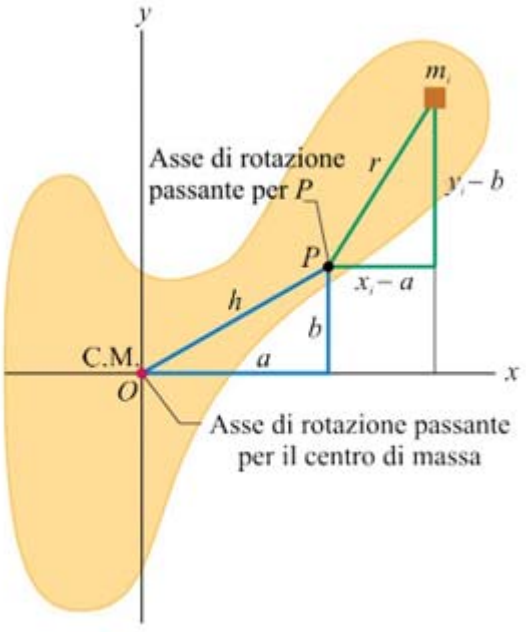


Fig. 28.13. Una sezione trasversale di un corpo rigido con il centro di massa in O. Il *teorema degli assi paralleli* stabilisce la relazione fra i momenti d'inerzia rispetto a due assi paralleli, dei quali uno passa per il centro di massa O e l'altro per un punto P alla distanza h da O. Entrambi gli assi sono perpendicolari al piano della figura.

quadrato della distanza di una particella dall'asse passante per O è $x_i^2 + y_i^2$, dove x_i e y_i sono le coordinate della particella di massa m_i relative all'asse passante per O. Il quadrato della sua distanza dall'asse passante per P è invece $(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2$. Quindi il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per P risulta

$$\begin{aligned} I &= \sum_i m_i\left((x_i - a)^2 + (y_i - b)^2\right) = \\ &= \sum_i m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) - 2a\sum_i m_i x_i - 2b\sum_i m_i y_i + \left(a^2 + b^2\right)\sum_i m_i \,. \end{aligned} \qquad [28.18]$$

Ma dalla definizione di centro di massa,

$$\sum_i m_i x_i = \sum_i m_i y_i = 0 \,, \qquad [28.19]$$

e perciò i due termini centrali sono nulli. Il primo termine non è altro che il momento d'inerzia I_{cm}, rispetto all'asse passante per O e l'ultimo è Mh^2 e pertanto ne consegue che $I = I_{cm} + Mh^2$.

La dimostrazione appena data ha utilizzato le sommatorie, una dimostrazione più rigorosa richiederebbe gli integrali visto che il corpo considerato è continuo e non discreto.

28.6. Conservazione del momento angolare e corpi rigidi

Consideriamo ora un oggetto puntiforme di massa m che si sta muovendo di moto circolare uniforme come mostrato in Fig. 28.14, il momento angolare $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$ avrà intensità pari a

$$L = rp = mrv \qquad [28.20]$$

dato che **r** e **p** sono tra loro ortogonali.
Ricordando che $v = \omega r$ si ottiene

$$L = mr^2\omega = I\omega \qquad [28.21]$$

dove $I = mr^2$ è il momento d'inerzia della particella di massa m che ruota attorno ad un asse passante per O e perpendicolare al piano di rotazione.

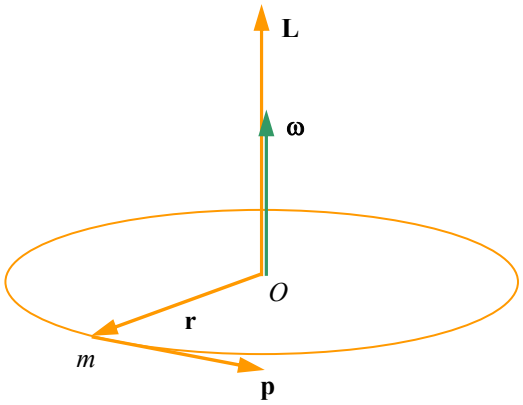


Fig. 28.14.

Visto che **L** e **ω** sono due vettori paralleli e concordi, possiamo perciò scrivere il momento angolare **L** di un corpo che ruota con velocità angolare **ω** attorno ad un asse fisso (o a un asse passante per il centro di massa che trasla in modo da rimanere sempre parallelo a se stesso) nel seguente modo:

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} \qquad [28.22]$$

La [28.22] mette in relazione **L** con **ω** in maniera analoga a quanto abbiamo visto avvenire tra quantità di moto e velocità nella definizione $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$: **L** sostituisce **p**, I sostituisce m e **ω** sostituisce **v**.

Facendo riferimento alla Fig.28.6 si può osservare che, per la conservazione del momento angolare (visto che la risultante dei momenti delle forze esterne è nulla), deve essere

$$\mathbf{L}_f = \mathbf{L}_i \qquad [28.23]$$

e cioè

$$I_f\boldsymbol{\omega}_f = I_i\boldsymbol{\omega}_i \,. \qquad [28.24]$$

Quindi, lo studente di Fig. 28.6 facendo diminuire il suo momento d'inerzia, aumenta automaticamente la sua velocità di rotazione. I e ω (il modulo della velocità angolare) si modificano mentre **L** rimane invariato. Si noti che la direzione e il verso di **ω** restano invariati.

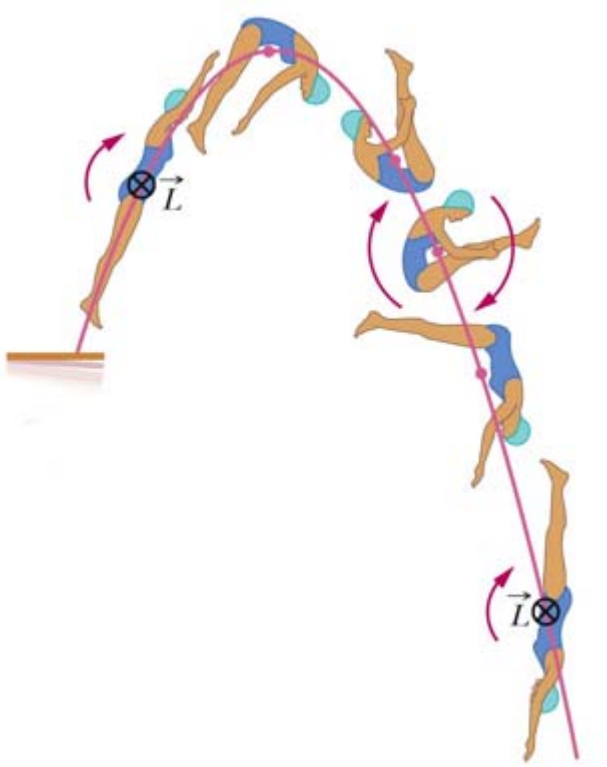


Fig. 28.15. Il momento angolare **L** della tuffatrice rimane costante durante tutto il volo, ed è indicato con il simbolo ⊗, che vuole rappresentare la coda di una freccia entrante nel piano della figura. Si nota anche che il centro di massa della tuffatrice (rappresentato da un puntino) descrive una traiettoria parabolica.

Acrobati, tuffatori, ballerini, pattinatori usano spesso questo principio. Poiché *I* dipende dal quadrato delle distanze delle parti del corpo dall'asse di rotazione, è possibile variarlo notevolmente mediante distensione o contrazione degli arti. Nella Fig. 28.15 si può osservare il moto rototraslatorio di una tuffatrice composto da un moto di traslazione del centro di massa (della tuffatrice) che descrive una parabola e dal moto di rotazione attorno al centro di massa del corpo della tuffatrice. Si noti che, come detto all'inizio di questo paragrafo, si conserva il momento angolare della tuffatrice e che l'asse istantaneo di rotazione passante per il centro di massa della tuffatrice si muove lungo la traiettoria parabolica mantenendosi sempre parallelo a se stesso. Quando la tuffatrice è più raccolta, il suo momento d'inerzia è minore ed ella ruota più rapidamente, mentre quando mantiene il suo corpo più disteso ella ruota più lentamente perché ha aumentato il suo momento d'inerzia.

Problemi di fine capitolo

28.1. Facendo riferimento alla Fig. 28.5, si dimostri che il momento angolare si conserva nel caso di un corpo di massa *m* che si muove di moto rettilineo uniforme.

28.2. Si consideri un manubrio formato da due sfere di massa 5.0 kg ciascuna, collegate da un'asta leggera e rigida lunga 1.0 m. Si trattino le sfere come masse puntiformi e si trascuri la massa dell'asta. Si vuole sapere quanto vale il momento d'inerzia del manubrio, (*a*) rispetto a un asse normale all'asta nel suo punto di mezzo e (*b*) rispetto ad un asse parallelo al precedente, ma passante per una delle due sfere. [2.5 kg·m^2; 5.0 kg·m^2]

28.3. Si risolva la situazione (*b*) del quesito precedente applicando il teorema di Steiner.

28.4. Un piccolo oggetto di massa *m* è attaccato ad uno spago leggero che passa attraverso un tubicino. Una mano tiene il tubicino in posizione verticale mentre l'altra mano trattiene l'estremità libera dello spago. L'oggetto viene posto in rotazione con velocità v_1 su un cerchio orizzontale di raggio r_1. A questo punto si tira lo spago diminuendo il raggio della traiettoria sino al valore r_2. Determinare la nuova velocità tangenziale v_2 dell'oggetto. La velocità angolare come cambia?

28.5. Un satellite di massa *m* ruota intorno alla Terra descrivendo una traiettoria ellittica. La velocità orbitale istantanea è maggiore al *perigeo* o all'*apogeo*? Di quale principio di conservazione ti sei avvalso per rispondere?

28.6. Uno studente siede su una piattaforma girevole attorno ad un asse verticale. Egli tiene le braccia tese orizzontalmente e ha in ciascuna mano un oggetto di massa 4.0 kg. Un compagno lo pone in rotazione con una velocità angolare di 0.50 rad/s. Si trascurino le forze di attrito e si supponga che rispetto all'asse di rotazione non agisca alcun momento meccanico. Si assuma anche che il momento d'inerzia dello studente rimanga costante e pari a 5.0 kg·m^2 indipendentemente dalla posizione delle braccia. La variazione di momento di inerzia quando questi abbassa le braccia sarà quindi dovuta solo alla variazione della distanza dei pesi dall'asse di rotazione, che inizialmente è di 90 cm e, a braccia abbassate, di soli 15 cm. Trovare la velocità angolare finale dello studente. [R. 1.1 rad/s]

28.7. Due ragazze di 50 kg stanno in piedi alle estremità di una tavola lunga 6 m di massa trascurabile. La tavola e le ragazze vengono messe in rotazione intorno ad un asse passante per il punto medio della tavola; la velocità angolare costante è di 1.5 rad/s. Si supponga che una delle ragazze cammini lungo la tavola fino a raggiungere un punto situato a metà strada dall'asse di rotazione. Qual è la nuova velocità angolare del sistema? [R.2.4 rad/s]

28.8. Nel *perielio* la Terra dista dal Sole 1.47×10^{11} m, e nell'*afelio* 1.52×10^{11} m. Qual è il rapporto delle velocità della Terra in questi due punti della sua orbita?

28.9. Sapendo che il raggio medio della Terra è circa 6371 km, quanto vale l'intensità del momento angolare della Terra in rotazione attorno al suo asse? Che direzione e verso ha tale vettore? Quanto vale, invece, il momento angolare della Terra in rotazione attorno al Sole? Calcola il rapporto delle intensità dei due momenti angolari. I due vettori hanno stessa direzione e verso?

28.10. Perché una sfera cava ha momento d'inerzia maggiore di una sfera piena avente stessa massa e stesso diametro?

28.11. Calcolare il momento angolare di un disco *long play* (diametro 12 pollici) da 180 g in funzione.

28.12. Un disco (m = 70g, diametro 120 mm) in un lettore *compact disk* compie 30 giri al secondo, calcolare il suo momento angolare.

28.13. Che raggio deve avere un anello per avere lo stesso momento di inerzia di un disco di massa uguale e raggio R?

28.14. Il rotore di un motore elettrico che fa funzionare un macinino da caffè può essere paragonato a un cilindro di 5.0 cm di diametro e di massa 8.0 kg. Il motore compie 3600 giri al minuto. (*a*) Qual è la sua energia cinetica? (*b*) A che velocità dovrebbe correre uno studente di massa 50 kg per avere la stessa energia cinetica del rotore calcolata nel punto (*a*)?

28.15. Si consideri l'atomo di idrogeno nello stato fondamentale e si determini il modulo del momento angolare orbitale dell'elettrone in funzione della massa dell'elettrone (9.11×10^{-31} kg), della carica fondamentale (1.602×10^{-19} C) e del raggio di Bohr (raggio dell'atomo di idrogeno nello stato fondamentale e pari a 0.53 Å); se ne calcoli quindi il valore esprimendolo in unità di $\hbar$ ($\hbar = h/2\pi$, dove h è la costante di Planck pari a 6.626×10^{-34} J·s).