

36. EQUAZIONI DI MAXWELL PER I CAMPI STATICI NEL VUOTO

36.1. Il flusso

La relazione fra il campo elettrico e le sue sorgenti può venire espressa in una maniera particolarmente semplice che ci sarà molto utile. A questo scopo è necessario definire una grandezza chiamata flusso. Consideriamo nello spazio un certo campo elettrico \mathbf{e} , in questo spazio, una certa superficie chiusa S , come quella di un pallone di forma qualsiasi. In Fig. 36.1(a) è raffigurata una superficie di questo tipo e il campo è rappresentato da alcune linee di forza. Dividiamo ora l'intera superficie in tanti elementi così piccoli che la superficie di ognuno di essi si possa considerare praticamente piana e che il vettore campo elettrico non cambi in maniera apprezzabile da un punto all'altro. In altre parole, il pallone non sia troppo rugoso e la sua superficie non passi attraverso una singolarità (*) del campo, come una carica puntiforme. L'area di ognuno di questi elementi ha un certo valore in metri quadrati e, inoltre, ogni elemento definisce in maniera univoca una direzione e un verso, quelli della normale alla sua superficie verso l'esterno. (Siccome la superficie è chiusa si può parlare di interno ed esterno senza pericoli di ambiguità). Rappresentiamo questa grandezza, questa direzione e questo verso con un vettore: allora, per ogni elemento in cui è stata suddivisa la superficie, per esempio l'elemento j , abbiamo un vettore $\Delta\mathbf{A}_j$ che fornisce la sua area e la sua orientazione. Quanto abbiamo detto è rappresentato nelle Fig. 36.1(b) e 36.1(c). Si osservi che il vettore $\Delta\mathbf{A}_j$ non dipende assolutamente dalla forma dell'elemento, né importa come sia stata suddivisa la superficie, finché gli elementi sono sufficientemente piccoli.

Sia \mathbf{E}_j , il vettore campo elettrico relativo all'elemento di superficie j . Il prodotto scalare $\mathbf{E}_j \times \Delta\mathbf{A}_j$ è un numero: chiameremo questo numero *flusso del campo elettrico* attraverso quell'elemento di superficie; in simboli $\Phi_{S_j}(\mathbf{E}_j)$. Per capire l'origine del nome immaginiamo una funzione vettoriale che rappresenti la velocità di un fluido in movimento, per esempio in un fiume, dove la velocità varia da un posto all'altro ma si mantiene costante nel tempo in qualsiasi posizione. Indichiamo questo campo vettoriale, che supporremo misurato in metri al secondo, con \mathbf{v} . Allora, se $\Delta\mathbf{A}$ è l'area orientata, in metri quadrati, di una intelaiatura immersa nell'acqua, $\mathbf{v} \times \Delta\mathbf{A}$ rappresenta la «rapidità» con cui fluisce l'acqua attraverso la cornice, in metri cubi al secondo (Fig. 36.2). Occorre notare che la definizione di flusso è applicabile a qualsiasi funzione vettoriale, indipendentemente dalla variabile fisica che essa rappresenta.

Sommiamo ora il flusso attraverso tutti gli elementi onde ottenere il flusso attraverso l'intera superficie; indicheremo questa grandezza scalare con $\Phi_S(\mathbf{E})$:

$$[36.1] \quad \Phi_S(\mathbf{E}) = \sum_{\text{per tutti gli } j} \mathbf{E}_j \times \Delta\mathbf{A}_j = \sum_{\text{per tutti gli } j} E_j \cdot \Delta A_j \cos \theta_j = \sum_{\text{per tutti gli } j} E_j \cdot \Delta A_{\perp j}.$$

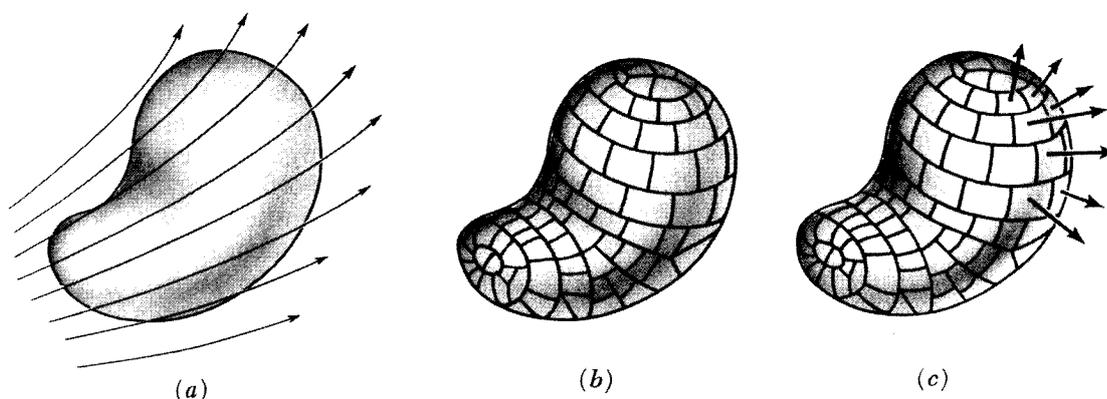


Fig. 36.1. (a) Una superficie chiusa in un campo vettoriale è divisa (b) in tanti piccoli elementi di superficie. (c) Ogni elemento di superficie è rappresentato da un vettore normale all'elemento e diretto verso l'esterno.

(*) Con singolarità del campo s'intende, di solito, non solo una sorgente puntiforme, dove il campo tende a infinito, ma anche qualsiasi posto dove il campo cambi intensità o direzione in maniera discontinua, come nel caso di uno strato infinitamente sottile di carica concentrata. Effettivamente quest'ultimo tipo di discontinuità, meno forte, non dà luogo nel nostro caso a difficoltà, a meno che la nostra superficie chiusa non coincida con quella di discontinuità per un tratto di area finita.

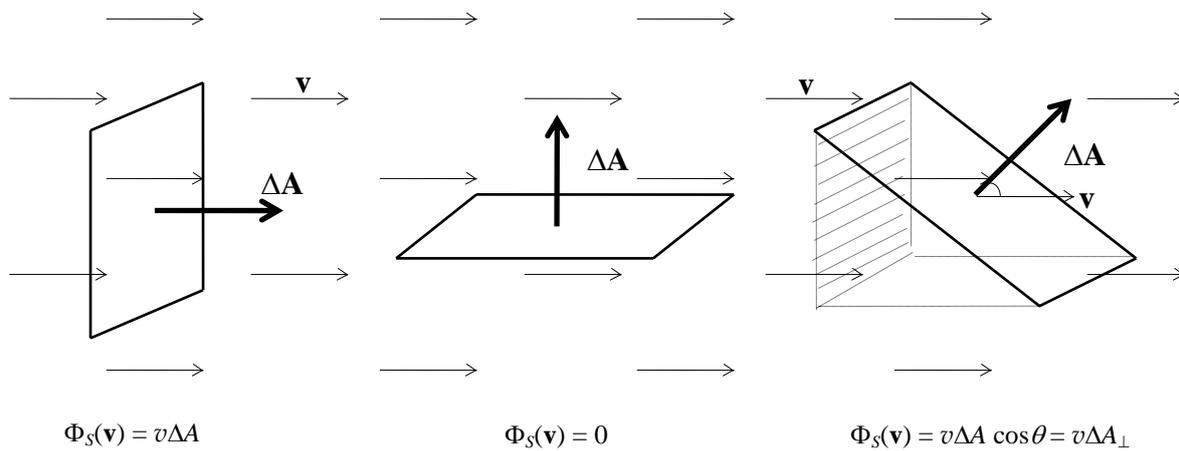


Fig. 36.2. Il flusso attraverso l'intelaiatura di area ΔA è $\mathbf{v} \times \Delta \mathbf{A}$ dove \mathbf{v} è la velocità del fluido. Il flusso è il volume di fluido ΔV che attraversa la superficie nell'unità di tempo: $\Phi_S(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \times \Delta \mathbf{A} = v \cdot \Delta A_{\perp} = \frac{\Delta l}{\Delta t} \cdot \Delta A_{\perp} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$.

È facile capire che il flusso del campo \mathbf{E} attraverso un elemento di superficie è direttamente proporzionale al numero di linee di campo che attraversano la superficie se si tiene conto della convenzione di Faraday nel tracciare le linee di campo.

Nel Sistema Internazionale il flusso del campo elettrico si misura in unità di campo elettrico per unità di area ovvero in volt-metro ($\text{V} \cdot \text{m}$).

Supponendo di far diventare ogni elemento sempre più piccolo e il loro numero sempre più grande, si passa dalla somma della [36.1] all'integrale di superficie:

$$[36.2] \quad \Phi_S(\mathbf{E}) = \int_{\text{superficie totale}} \mathbf{E} \times d\mathbf{A} .$$

L'integrale di superficie di una funzione vettoriale qualunque, \mathbf{F} , esteso alla superficie S , significa questo: si divida S in tanti elementi di superficie, ognuno rappresentato da un vettore diretto verso l'esterno, di intensità uguale all'area dell'elemento; per ogni elemento si esegua il prodotto scalare del vettore elemento di superficie per il valore locale di \mathbf{F} , si sommino tutti questi prodotti, e il limite di questa somma, al tendere a zero dell'area degli elementi, dà l'integrale di superficie. Non dobbiamo allarmarci alla prospettiva di dover effettuare questo calcolo per una superficie di forma complicata come quella di Fig.36.1: la sorprendente proprietà che ora dimostreremo lo rende inutile!

36.2. La legge di Gauss per il campo elettrico (o prima equazione di Maxwell)

Consideriamo il più semplice caso che si possa immaginare: il campo sia quello generato da una singola carica positiva puntiforme isolata, q , e la superficie S sia quella di una sfera di raggio r e centro nella carica (Fig. 36.3). Quanto vale il flusso $\Phi_S(\mathbf{E})$ attraverso questa superficie? La risposta è facile, dato che l'intensità di \mathbf{E} in ogni punto della superficie è $k_{el} \cdot q/r^2$ e la sua direzione e verso coincidono con quelli della normale esterna alla superficie in quel punto. Abbiamo così:

$$[36.3] \quad \begin{aligned} \Phi_S(\mathbf{E}) &= \int_S \mathbf{E} \times d\mathbf{A} = \int_S E \cdot d\mathbf{A} = E \int_S dA = k_{el} \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \\ &= k_{el} 4\pi q \end{aligned}$$

o meglio:

$$[36.4] \quad \Phi_S(\mathbf{E}) = k_{el} 4\pi q = \frac{q}{\epsilon_0} .$$

Il flusso non dipende dalle dimensioni della sfera.

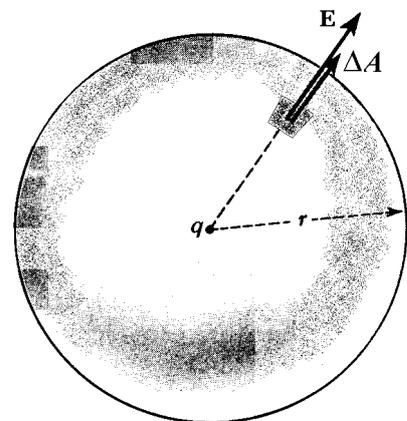


Fig. 36.3. Nel campo \mathbf{E} di una carica puntiforme q , qual è il flusso uscente attraverso una superficie sferica che abbia il centro nella carica?

Immaginiamo ora una seconda superficie di forma qualsiasi che racchiuda la prima, ma che *non* sia sferica, come in Fig. 36.3. Noi affermiamo che il flusso totale attraverso questa superficie è lo stesso di quello attraverso la sfera. Per verificare ciò consideriamo un cono, con vertice in q , che tagli una piccola porzione di superficie a sulla sfera e, proseguendo, una porzione A sulla superficie più esterna, a distanza R dalla carica puntiforme. L'area della superficie A è maggiore di quella di a per due fattori: primo, per il rapporto dei quadrati delle distanze $(R/r)^2$; secondo, a causa della diversa inclinazione, per il fattore $1/\cos\vartheta$, dove ϑ è l'angolo fra la normale esterna alla superficie A e la direzione radiale (Fig. 36.4). L'intensità del campo elettrico in A , ancora diretto radialmente, si riduce, rispetto al valore che aveva sull'elemento di superficie della sfera, per il fattore $(r/R)^2$. Indichiamo con $\mathbf{E}_{(R)}$ il campo sulla superficie esterna e con $\mathbf{E}_{(r)}$ quello sulla sfera, si ha allora:

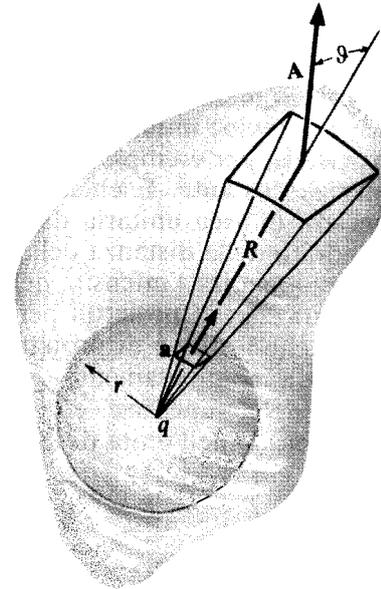


Fig. 36.4. Dimostrazione che il flusso attraverso qualunque superficie chiusa attorno a q è uguale a quello attraverso la superficie sferica.

$$\begin{aligned} \text{Flusso attraverso l'elemento di superficie esterna} &= \\ &= \mathbf{E}_{(R)} \times \mathbf{A} = E_{(R)}A \cos\vartheta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Flusso attraverso l'elemento di superficie interna} &= \\ &= \mathbf{E}_{(r)} \times \mathbf{a} = E_{(r)}a \end{aligned}$$

$$[36.5] \quad E_{(R)}A \cos\vartheta = \left(E_{(r)} \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \cdot \left(a \cdot \left(\frac{R}{r} \right)^2 \cdot \frac{1}{\cos\vartheta} \right) \cdot \cos\vartheta = E_{(r)}a.$$

Questo dimostra che il flusso attraverso le due porzioni di superficie è lo stesso.

Ogni porzione della superficie esterna può quindi venire messa in corrispondenza con una parte della superficie sferica, per cui il flusso totale attraverso le due superfici deve risultare lo stesso: cioè, il flusso attraverso la nuova superficie deve valere esattamente $k_{el}4\pi q$. Ma la superficie aveva forma e dimensioni *arbitrarie* (*), per cui si può concludere che il flusso del campo elettrico attraverso una superficie qualsiasi, che racchiuda una carica puntiforme, q , è $k_{el}4\pi q = q/\epsilon_0$. Come corollario si può osservare che il flusso totale attraverso una superficie chiusa sarà *zero* se la carica si trova *al di fuori* della superficie. Lasciamo che il lettore dimostri questa affermazione, aiutandosi con la Fig. 36.5 che può suggerire una possibile linea di ragionamento.

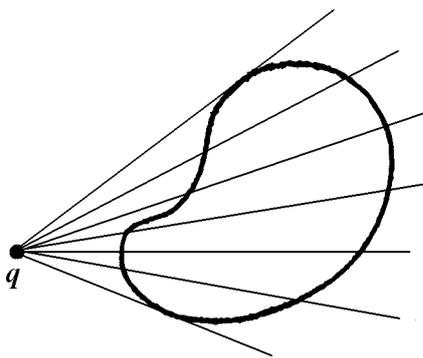


Fig. 36.5. Provare che il flusso attraverso S è nullo.

Esiste un metodo per analizzare la situazione che fa sì che il risultato sembri ovvio: immaginiamo che in q vi sia una sorgente che emetta particelle, per esempio proiettili o fotoni, in tutte le direzioni con frequenza costante. È chiaro che il flusso di particelle attraverso una finestra di area unitaria decrescerà proporzionalmente all'inverso del quadrato della distanza della finestra da q , e perciò possiamo ricavare un'analogia fra l'intensità del campo elettrico \mathbf{E} e l'intensità del flusso di particelle, in proiettili per unità di area e di tempo. È abbastanza ovvio che il flusso di proiettili attraverso una superficie qualsiasi che circonda completamente q non dipende dalle dimensioni e dalla forma della superficie, ed è dato proprio dal numero totale di particelle emesse nell'unità di tempo. Allo stesso modo il flusso di \mathbf{E} attraverso una superficie chiusa non

deve dipendere dalle dimensioni e dalla forma di questa. La caratteristica comune dei due esempi è la dipendenza dell'intensità dall'inverso del quadrato della distanza. La situazione è ora matura per parlare di sovrapposizione! Ogni campo elettrico è la somma dei campi prodotti dalle singole sorgenti componenti. Questa proprietà era già manifesta nell'espressione della legge di Coulomb. Ovviamente anche il flusso gode

(*) Per la verità la seconda superficie racchiude la sfera, ma questa non è una condizione necessaria e, inoltre, la sfera può essere presa piccola a piacere.

della stessa proprietà additiva, perciò, quando abbiamo un certo numero di sorgenti q_1, q_2, \dots, q_n i cui campi, se ciascuna fosse presente da sola, sarebbero $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n$, il flusso $\Phi_S(\mathbf{E})$ attraverso una certa superficie S nel campo totale \mathbf{E} può scriversi:

$$[36.6] \quad \Phi_S(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \times d\mathbf{A} = \int_S (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n) \times d\mathbf{A}.$$

Abbiamo per l'appunto imparato che $\Phi_S(\mathbf{E}_j) = \int_S \mathbf{E}_j \times d\mathbf{A}$ è uguale a $k_{el} \cdot 4\pi q_j$, se la carica q_j è all'interno di S , e vale zero se è al di fuori; quindi ogni carica q_i interna alla superficie contribuisce esattamente con $k_{el} \cdot 4\pi q_i$ all'integrale della [36.6], mentre il contributo di tutte le cariche esterne è nullo. Siamo arrivati alla **legge di Gauss per il campo elettrico**:

[36.7] Il flusso del campo elettrico \mathbf{E} attraverso una qualunque superficie chiusa, cioè l'integrale $\int_S \mathbf{E} \times d\mathbf{A}$ esteso a tutta la superficie, è uguale a $k_{el} \cdot 4\pi$ volte la carica totale contenuta nella superficie:

$$\int_S \mathbf{E} \times d\mathbf{A} = k_{el} 4\pi \sum_i q_i = \frac{\sum_i q_i}{\epsilon_0}.$$

L'affermazione contenuta nel riquadro viene considerata una *legge*, in quanto essa equivale alla legge di Coulomb e potrebbe servire ugualmente bene come legge fondamentale delle interazioni elettrostatiche, una volta definiti la carica e il campo. La legge di Gauss e quella di Coulomb non sono due leggi fisiche indipendenti, ma la stessa legge formulata in maniera diversa (*).

Nelle Figg. 36.6, 36.7, 36.8 sono riportate alcune esemplificazioni.

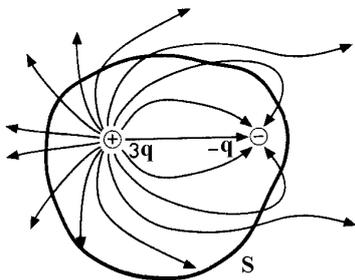


Fig. 36.6. All'interno della superficie chiusa S sono presenti due cariche di valore $3q$ e $-q$. Alcune linee di campo escono dalla superficie S per poi rientrarvi da un altro punto. Il flusso di \mathbf{E} è lo stesso che si avrebbe se all'interno di S fosse presente, in un punto qualsiasi, una sola carica di valore $2q$.

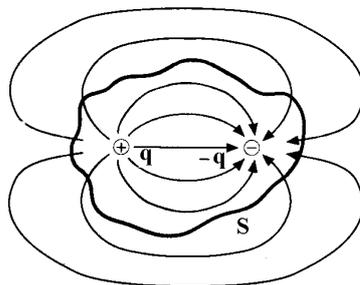


Fig. 36.7. All'interno della superficie chiusa S sono presenti due cariche opposte di valore q e $-q$. Il flusso di \mathbf{E} attraverso S è nullo.

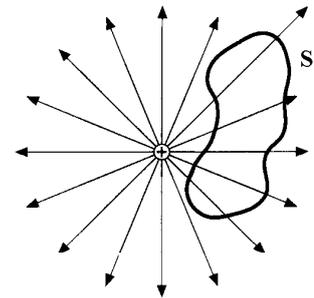


Fig. 36.8. La superficie chiusa S non contiene cariche elettriche. Il flusso di \mathbf{E} entrante in S è pari a quello uscente; il flusso complessivo è nullo.

(*) Esiste una differenza, per ora senza conseguenza, ma importante ai fini dello studio futuro dei campi prodotti da cariche in moto. La legge di Gauss vale per una classe di campi più ampia di quella rappresentata dal campo elettrostatico. In particolare, un campo che dipenda dall'inverso del quadrato di r , ma non abbia simmetria sferica, può soddisfare la legge di Gauss. In altre parole, la legge di Gauss da sola non implica la simmetria del campo prodotto da una sorgente puntiforme, come è invece implicito nella legge di Coulomb.

Se torniamo a considerare la nostra dimostrazione ci accorgiamo che è imperniata sulla dipendenza dell'interazione dall'inverso del quadrato della distanza e, naturalmente, sulla additività delle interazioni, o sovrapposizione. Perciò la legge è applicabile in fisica a qualsiasi campo che dipenda dall'inverso del quadrato della distanza, per esempio al campo gravitazionale.

È facile dimostrare che la legge di Gauss *non* è più valida se la forza dipende dall'inverso del cubo della distanza: in questo caso il flusso del campo elettrico di una carica puntiforme q , attraverso una sfera di raggio R centrata sulla carica, sarebbe:

$$[36.8] \quad \Phi_S(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \times d\mathbf{A} = k_{el} \frac{q}{R^3} \cdot 4\pi R^2 = k_{el} \frac{4\pi q}{R}.$$

Servendoci di una sfera sufficientemente grande sarebbe possibile ottenere un flusso, che la attraversi, piccolo quanto si vuole, pur restando costante la carica totale al suo interno. Questa importante legge aumenta la nostra conoscenza. Innanzitutto mostra un legame tra il campo e le sue sorgenti che è l'inverso di quello presentato dalla legge di Coulomb: mentre quest'ultima ci dice come ricavare il campo elettrico se sono date le cariche, con la legge di Gauss possiamo determinare, se è noto il campo, la quantità di carica presente in una qualunque regione dello spazio. In secondo luogo, la relazione matematica che abbiamo dimostrata è un potente strumento analitico che permette, come vedremo, di semplificare problemi notevolmente complicati.

36.3. Applicazioni della legge di Gauss

La legge di Gauss può essere usata per calcolare facilmente l'intensità del vettore campo elettrico \mathbf{E} , ma soltanto nei casi in cui la distribuzione di carica soddisfa a condizioni di simmetria. Vediamo alcuni esempi.

I - Calcolo di \mathbf{E} generato da una carica totale Q uniformemente distribuita su una superficie sferica

È chiaro che per ragioni di simmetria il campo è diretto radialmente (il verso dipende dal segno della carica). Considerando allora come superficie gaussiana una sfera concentrica alla prima e di raggio r (Fig.36.9):

$$[36.9] \quad \Phi_S(\mathbf{E}) = E\Delta A_1 + E\Delta A_2 + \dots + E\Delta A_n = E4\pi r^2.$$

Ma per la legge di Gauss:

$$[36.10] \quad \Phi_S(\mathbf{E}) = Q/\varepsilon_0$$

da cui

$$[36.11] \quad Q/\varepsilon_0 = E4\pi r^2$$

quindi

$$[36.12] \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

cioè il campo all'esterno della distribuzione sferica è lo stesso del campo che si avrebbe se tutta la carica fosse concentrata nel centro.

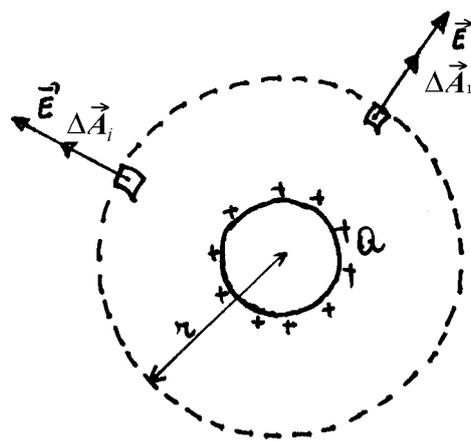


Fig. 36.9.

II - Calcolo di \mathbf{E} per una distribuzione piana di carica

Supponiamo di avere una lamina sottile, indefinita e carica, con densità di carica superficiale $\sigma = Q/A$ (cioè la carica per unità di superficie) costante. Quanto vale \mathbf{E} alla distanza r dal piano? Basta scegliere come superficie gaussiana una superficie a forma di scatola cilindrica, avente come area di base ΔA e altezza $2r$ disposta in modo da forare il piano, come in Fig. 36.10. Per simmetria \mathbf{E} è diretto perpendicolarmente alla superficie di base, verso l'esterno. Poiché \mathbf{E} non taglia la superficie laterale cilindrica ($\alpha=90^\circ$) il contributo al flusso di questa superficie è nullo. Per la legge di Gauss:

$$[36.13] \quad \Phi_{\Sigma}(\mathbf{E}) = 0 + E \cdot \Delta A + E \cdot \Delta A = \Delta Q / \epsilon_0$$

ma $\Delta Q = \sigma \Delta A$, quindi

$$[36.14] \quad 2E \cdot \Delta A = \sigma \Delta A / \epsilon_0$$

da cui

$$[36.15] \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Si osservi che E ha lo stesso valore in tutti i punti del piano (si tratta di una lamina indefinita).

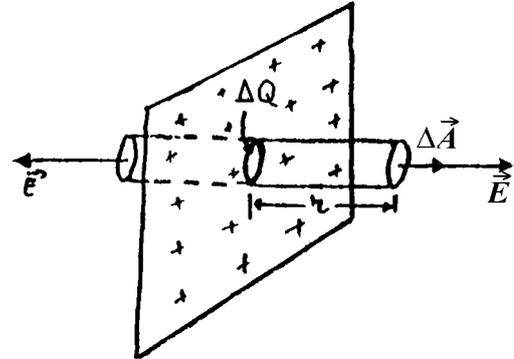


Fig. 36.10.

III - Calcolo di \mathbf{E} in prossimità della superficie esterna di

un conduttore in equilibrio elettrostatico, con densità di carica superficiale $\sigma = \Delta Q / \Delta A$; in generale σ varierà da punto a punto con la curvatura della superficie. Consideriamo un piccolo cilindro (Fig. 36.11), avente le generatrici normali al conduttore e sezione uguale ad un elemento ΔS della superficie del conduttore. Tenendo presente che attraverso le superfici laterali il flusso del campo elettrico è nullo (\mathbf{E} vicino alla superficie è diretto perpendicolarmente ad essa, e verso l'esterno se la carica è positiva e che pure è nullo il flusso attraverso la base interna del conduttore ($\mathbf{E}=\mathbf{0}$ internamente), si ha che il flusso attraverso la base esterna è:

$$[36.16] \quad \Phi_S(\mathbf{E}) = E \cdot \Delta A = \Delta Q / \epsilon_0$$

ma $\Delta Q = \sigma \Delta A$, quindi

$$[36.17] \quad E \cdot \Delta A = \sigma \Delta A / \epsilon_0$$

da cui

$$[36.18] \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (\text{teorema di Coulomb}).$$

Dal confronto appare che il campo elettrico nelle vicinanze di un conduttore la cui densità di carica superficiale è σ , è due volte più grande del campo nelle vicinanze di una lamina avente la stessa densità superficiale di carica. Perché? Basta guardare le linee di forza, che attraversano nel primo caso solo una base della superficie gaussiana, e nel secondo attraversano entrambe le basi della stessa superficie gaussiana.

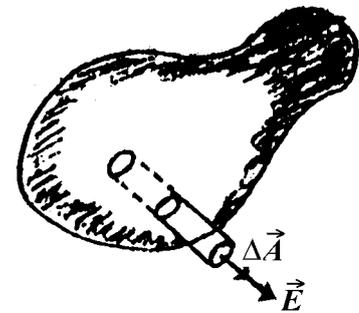


Fig. 36.11.

IV - Nei corpi conduttori in equilibrio elettrico, le cariche si distribuiscono sulla superficie esterna.

In Fig. 36.12 è mostrata una sezione di un conduttore isolato di forma arbitraria. Le linee tratteggiate rappresentano la sezione di una superficie gaussiana contenuta all'interno del conduttore a piccola distanza dalla superficie. Poiché $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ internamente al conduttore, esso deve essere zero in ogni punto della superficie gaussiana, il che significa che il flusso Φ per questa superficie deve essere zero. La legge di Gauss prevede allora che all'interno della superficie gaussiana la carica deve essere nulla. Se Q non può trovarsi all'interno, essa può stare soltanto all'esterno di essa, cioè sulla superficie del conduttore.

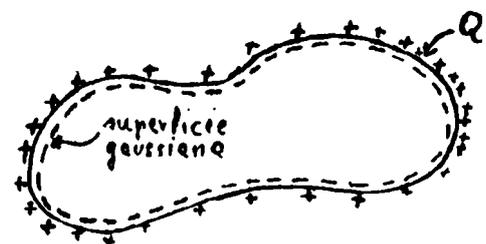


Fig. 36.12.

36.4. La legge di Gauss per il campo magnetico

Il flusso del campo magnetico \mathbf{B} attraverso una superficie S , è definito, in modo del tutto analogo al flusso del campo \mathbf{E} , come:

$$[36.19] \quad \Phi_S(\mathbf{B}) = \int_{\text{superficie totale}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} .$$

Nel Sistema Internazionale il flusso del campo magnetico \mathbf{B} si misura in weber (simbolo Wb) e, dato che il flusso del campo magnetico \mathbf{B} ha le dimensioni di un campo magnetico per un'area, si ha che:

$$[36.20] \quad 1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 = 1 \text{ V} \cdot \text{s} .$$

Anche per il campo \mathbf{B} , come per il campo \mathbf{E} , è possibile determinare il flusso attraverso una superficie S chiusa. A differenza di ciò che avviene nel caso di un campo elettrico, tuttavia, il flusso del campo \mathbf{B} attraverso una superficie chiusa è sempre nullo. In simboli:

$$[36.21] \quad \Phi_S(\mathbf{B}) = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 .$$

La precedente equazione indicata *come legge di Gauss per il campo magnetico*, (o *seconda equazione di Maxwell*), può essere giustificata senza ricorrere a calcoli laboriosi. Poiché il campo magnetico, a differenza di quello elettrico, è privo di sorgenti e pozzi, le sue linee di campo sono *sempre chiuse* (campo solenoidale). Ne segue che ogni linea entrante in una superficie chiusa deve anche uscirne e che, di conseguenza, il flusso totale non può essere che nullo (Fig. 36.13).

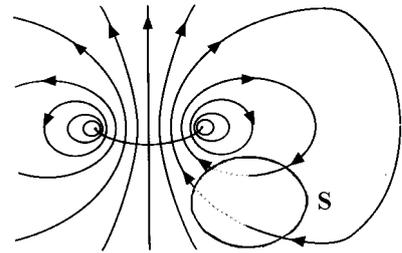


Fig. 36.13.

36.5. Circuitazione di un campo vettoriale lungo una linea chiusa

Nello studio dell'elettromagnetismo oltre al flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie, è utile introdurre anche un altro strumento matematico, la **circuitazione di un campo vettoriale lungo una linea chiusa**, che consentirà di esprimere analiticamente non solo alcune proprietà dei campi elettrici e magnetici, ma anche quelle legate alle loro interazioni. Si utilizzano, in questo caso, i **segmenti orientati**: a ciascun segmento orientato \overrightarrow{HK} , infatti, è sempre possibile associare un vettore Δ_{HK} di modulo pari alla misura di \overrightarrow{HK} , e di direzione e verso uguali a quelli di \overrightarrow{HK} (Fig. 36.14). È tuttavia impossibile associare a una generica linea curva orientata l_{AB} , di estremi A e B , un unico vettore. In questo caso, è però possibile suddividere la linea l_{AB} in N brevi tratti approssimativamente rettilinei $AP_1, P_1P_2, \dots, P_{N-1}B$, a ciascuno dei quali si può associare un vettore Δ_i ($1 \leq i \leq N$) (Fig. 36.15). Se alla regione in cui si trova l_{AB} è associato un qualsiasi campo vettoriale \mathbf{A} , tale che il vettore \mathbf{A}_i associato a ogni singolo segmento Δ_i sia uniforme, è possibile definire il prodotto scalare:

$$[36.22] \quad \omega_i = \mathbf{A}_i \cdot \Delta_i .$$

Se si fanno tendere a zero le lunghezze Δ_i , il che equivale a far tendere all'infinito il numero di suddivisioni N , la somma di tutti i termini ω_i tenderà a un valore limite ω , indicato con la notazione simbolica:

$$[36.23] \quad \omega = \lim_{\Delta_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N (\mathbf{A}_i \cdot \Delta_i)$$

che si legge "...limite per Δ_i , che tende a zero della sommatoria...". La notazione precedente può essere sostituita dalla scrittura equivalente:

$$[36.24] \quad \omega = \int_{l_{AB}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

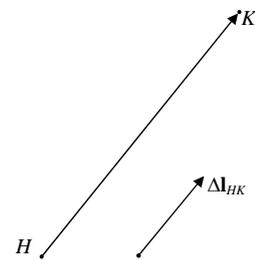


Fig. 36.14. Il vettore Δ_{HK} ha modulo pari alla misura della lunghezza del segmento orientato \overrightarrow{HK} , la stessa direzione e lo stesso verso di \overrightarrow{HK} .

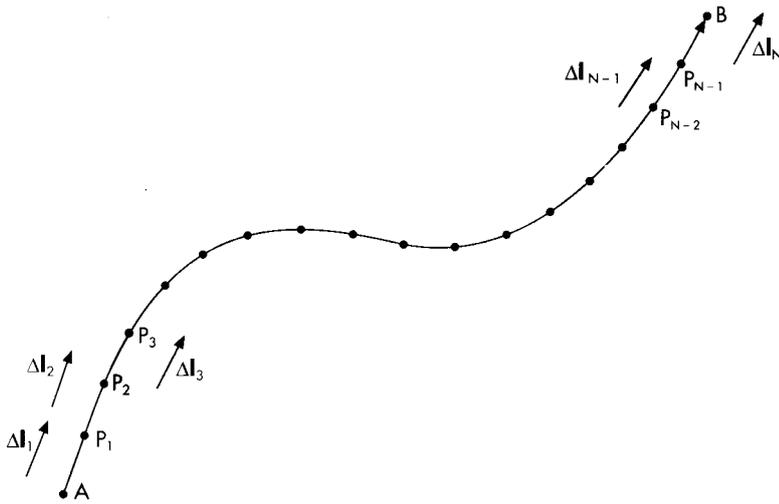


Fig. 36.15. La linea orientata AB è suddivisa in N tratti approssimativamente rettilinei, a ognuno dei quali è associato un vettore $\Delta \mathbf{l}_i$, ($i = 1, 2, \dots, N$).

che si legge “...integrale, esteso alla linea l_{AB} , del prodotto scalare...”. L’indicazione l_{AB} ai piedi del simbolo di integrazione, indica che la somma degli infiniti prodotti scalari $\mathbf{A} \times d\mathbf{l}$ è estesa all’intera linea orientata che unisce i punti A e B .

Quando gli estremi di una linea l_{PQ} coincidono, cioè quando la linea è chiusa, l’integrale di linea [36.24] viene chiamato **circuitazione del campo \mathbf{A} lungo la linea chiusa l** . In simboli:

$$[36.25] \quad C_l(\mathbf{A}) = \int_{PP} \mathbf{A} \times d\mathbf{l} = \oint_l \mathbf{A} \times d\mathbf{l}$$

ossia la circuitazione, estesa alla linea l , del campo \mathbf{A} è uguale all’integrale lungo la linea chiusa l del prodotto scalare tra i vettori \mathbf{A} e $d\mathbf{l}$. Nella [36.25] il cerchietto attorno al simbolo di integrazione serve a indicare che la linea orientata l è chiusa.

A volte, nella descrizione delle proprietà di un campo vettoriale, avviene di dover calcolare sia la circuitazione del campo lungo una linea chiusa l , sia il flusso attraverso una superficie che abbia la linea l come contorno.^(*)

Nel calcolare una circuitazione occorre scegliere tra i due possibili orientamenti sulla linea l , così come, nel calcolare un flusso occorre scegliere tra i **due possibili versi della normale \mathbf{n}** al generico elemento di superficie ΔS . Si stabilisce che queste due scelte vadano coordinate fra di loro, di modo che una volta effettuata arbitrariamente una delle due, l’altra sia determinata dal seguente criterio: se il pollice della mano destra è orientato nel verso di \mathbf{n} , le altre dita indicano l’orientamento secondo cui va calcolata la circuitazione (Fig. 36.16).

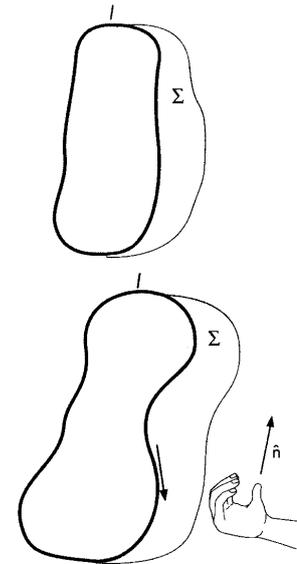


Fig. 36.16. Se si orienta il pollice destro nel verso di \mathbf{n} le altre dita indicano il verso lungo cui va calcolata la circuitazione.

36.6. Circuitazione e campi conservativi

I concetti di integrale di linea e di circuitazione sono stati finora definiti per un generico campo vettoriale. Si tratta ora di utilizzarli nello studio delle proprietà dei campi elettrici e magnetici.

A questo scopo è importante osservare che il calcolo di un integrale di linea di forze fornisce il valore di un lavoro (Fig. 36.17). Un integrale di linea, infatti, è il limite di una somma di termini, ognuno dei quali rappresenta il lavoro elementare:

$$[36.26] \quad dL = \mathbf{F} \times d\mathbf{l}$$

eseguito dalla forza \mathbf{F} quando il suo punto di applicazione si sposta di $d\mathbf{l}$. Il lavoro complessivo L_{AB} , eseguito

^(*) La superficie di cui stiamo trattando non è chiusa; infatti, dato che una superficie chiusa non ha contorno o, come talvolta si usa dire, ha contorno nullo, la convenzione qui esposta perderebbe significato.

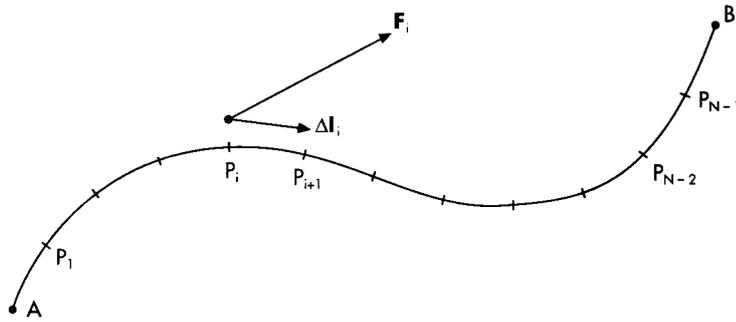


Fig. 36.17. Lungo il tratto generico $P_i P_{i+1}$, indicato dal vettore Δl_i , agisce la forza costante \mathbf{F}_i che compie il lavoro $L_{AB} = \sum_{i=1}^N L_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i \times \Delta l_i)$.

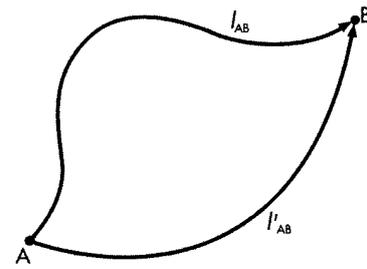


Fig. 36.18. Se è noto che il campo di forze associato alla regione mostrata in figura è conservativo, si ha che: $L_{AB} = \int_{l_{AB}} \mathbf{F} \times d\mathbf{l} = \int_{l'_{AB}} \mathbf{F} \times d\mathbf{l} \Rightarrow C_l(\mathbf{F})=0$.

dalla forza \mathbf{F} , quando il suo punto d'applicazione si sposta lungo la linea l_{AB} che unisce i punti A e B, è esprimibile come:

$$[36.26] \quad L_{AB} = \int_{l_{AB}} \mathbf{F} \times d\mathbf{l}.$$

Nei casi in cui il lavoro L_{AB} non dipende dal particolare percorso scelto, ma solo dai punti iniziale e finale, le forze in gioco sono chiamate forze conservative e i campi associati campi conservativi.

Per esempio, se è noto che il campo di forze mostrato in Fig.36.17 è conservativo, sono valide le relazioni:

$$[36.27] \quad L_{AB} = \int_{l_{AB}} \mathbf{F} \times d\mathbf{l} = \int_{l'_{AB}} \mathbf{F} \times d\mathbf{l}.$$

Di conseguenza **il lavoro fatto da una forza conservativa lungo una linea chiusa è sempre nullo** (o anche: la circuitazione di una forza conservativa è sempre nulla). Infatti, riferendosi alla situazione rappresentata in Fig. 36.18, si può scrivere che:

$$[36.28] \quad L_{ABA} = C_l(\mathbf{F}) = \int_l \mathbf{F} \times d\mathbf{l} = \int_{l_{AB}} \mathbf{F} \times d\mathbf{l} + \int_{l'_{BA}} \mathbf{F} \times d\mathbf{l} = \int_{l_{AB}} \mathbf{F} \times d\mathbf{l} - \int_{l_{AB}} \mathbf{F} \times d\mathbf{l} = 0.$$

Sapere se le forze con cui si sta trattando sono o no conservative è estremamente utile, dato che il fatto che una grandezza fisica (in questo caso la circuitazione) sia nulla permette di semplificare le equazioni matematiche in cui è coinvolta.

Le forze elettrostatiche sono conservative, dato che il lavoro che esse eseguono per spostare una carica da un punto A a un punto B è indipendente dal particolare cammino seguito per andare da A a B. È questa la ragione che ha consentito di associare a un punto A un potenziale elettrostatico V_A e, nel caso in cui in A sia presente una carica q , un'energia potenziale elettrostatica:

$$[36.29] \quad U_A = qV_A$$

associata alla carica q .

Nel caso in cui due punti A e B si trovino a potenziali V_A e V_B tali che:

$$[36.30] \quad \Delta V_{AB} = V_A - V_B > 0$$

una carica positiva q , portandosi da A a B, perde una quantità di energia potenziale elettrostatica:

$$[36.31] \quad \Delta U_{AB} = U_A - U_B = q(V_A - V_B) = q\Delta V_{AB} > 0$$

in accordo col fatto che, in questo caso, le forze elettriche compiono un lavoro positivo. Analogamente le forze elettriche compiono un lavoro positivo portando una carica negativa da un punto a potenziale minore fino a un punto a potenziale maggiore.

In generale si può affermare che le cariche sottoposte solo a forze di tipo elettrostatico, tendono a spostarsi verso punti in cui la loro **energia potenziale è minore**; questi punti si troveranno a potenziali minori per le cariche positive, e a potenziali superiori per le cariche negative. Si osservi che a rigore, in tutti i casi in cui si parlava di lavoro compiuto dalle forze elettriche per spostare una carica, le forze non sono propriamente

elettrostatiche, dato che gli spostamenti delle cariche modificano le condizioni preesistenti del campo. Per ora trascureremo queste osservazioni, che assumeranno invece importanza nello studio dei campi non statici.

36.7. La circuitazione del campo elettrico

Anche per gli integrali di linea, riducibili al limite di somme, valgono proprietà formalmente analoghe a quelle delle comuni sommatorie. In particolare, nel caso in cui k sia una costante reale qualsiasi, vale la proprietà:

$$[36.32] \quad \int_{l_{AB}} k \mathbf{A} \times d\mathbf{l} = k \int_{l_{AB}} \mathbf{A} \times d\mathbf{l}.$$

Dato che la circuitazione di una forza elettrostatica è nulla, ossia:

$$[36.33] \quad \oint \mathbf{F} \times d\mathbf{l} = \oint q \mathbf{E} \times d\mathbf{l} = 0$$

utilizzando la [7.1] si deduce, poiché il valore di q è costante, che:

$$[36.34] \quad q \oint \mathbf{E} \times d\mathbf{l} = 0$$

e quindi:

$$[36.35] \quad \oint \mathbf{E} \times d\mathbf{l} = 0$$

valida in qualsiasi caso, dato che non è stata fatta alcuna ipotesi restrittiva sulla linea l . Di conseguenza,

in qualsiasi campo elettrostatico, la circuitazione del campo elettrico \mathbf{E} , lungo una linea chiusa, è sempre nulla. In simboli:

$$[36.36] \quad C_l(\mathbf{E}) = 0.$$

Si vedrà in seguito che la circuitazione di \mathbf{E} è nulla solo nel caso di campi statici. Nel caso di campi variabili, invece, assume un valore legato alle modalità di variazione del campo elettrico.

36.8. La circuitazione del campo magnetico

Per formulare un'equazione relativa alla circuitazione del campo \mathbf{B} lungo una linea chiusa, si consideri un conduttore rettilineo di lunghezza indefinita, percorso da una corrente di intensità i , e una circonferenza l di raggio R con centro nel conduttore, appartenente a un piano ad esso perpendicolare (Fig.36.19). Il campo magnetico \mathbf{B}_P in un punto P di l , può essere determinato utilizzando la legge di Biot e Savart. Grazie a essa si può affermare che il vettore di campo \mathbf{B}_P è, in ogni punto P , diretto tangenzialmente alla linea l e ha modulo:

$$[36.37] \quad B_P = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

Lungo la linea l , percorsa nel verso indicato in Fig. 36.19, la circuitazione di \mathbf{B} è espressa da:

$$[36.38] \quad C_l(\mathbf{B}) = \oint \mathbf{B} \times d\mathbf{l} = \oint B dl$$

poiché \mathbf{B} e $d\mathbf{l}$ sono paralleli ed equiversi.

Se ora si sostituisce nella [36.38] l'espressione di \mathbf{B}_P fornita dalla [36.37] e si considerano i valori costanti coinvolti nel problema, si ottiene:

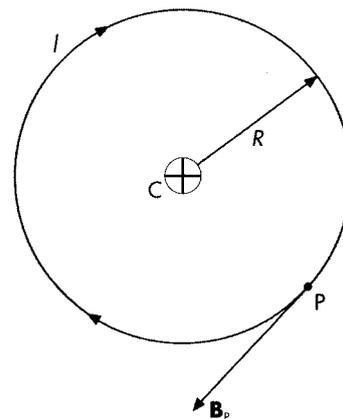


Fig. 36.19. Il conduttore isolato C , perpendicolare al piano del foglio, è percorso da una corrente di intensità i con verso entrante nel foglio. Un generico punto P , a distanza R dal centro del conduttore, appartiene a una linea di campo magnetico circolare. Al punto P è associato un vettore campo magnetico \mathbf{B}_P tangente alla linea di campo l .

$$[36.39] \quad C_l(\mathbf{B}) = \oint_l \frac{\mu_0 i}{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \oint_l dl$$

Nella [36.39] compare la circuitazione di dl , cioè la somma degli infiniti termini dl estesa all'intera circonferenza l , pari, quindi, alla misura della lunghezza della circonferenza e cioè:

$$[36.40] \quad \oint_l dl = 2\pi R$$

si ottiene che:

$$[36.41] \quad C_l(\mathbf{B}) = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \oint_l dl = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \cdot (2\pi R) = \mu_0 i$$

in base alla quale:

la circuitazione del campo magnetico \mathbf{B} , lungo una circonferenza concentrica a un conduttore rettilineo indefinito percorso da una corrente i , è proporzionale a i .

Nel Sistema Internazionale la circuitazione del campo magnetico \mathbf{B} si misura in weber al metro ($\text{Wb}\cdot\text{m}^{-1}$) dove $1\text{Wb} = 1\text{V}\cdot\text{s}$.

Il fatto che la circuitazione di \mathbf{B} lungo una circonferenza sia indipendente dal raggio R , ha qualcosa a che vedere con ciò che si era osservato a proposito della legge di Gauss per il campo elettrico. Mentre per la legge di Gauss assumeva importanza cruciale l'esponente -2 relativo alla distanza nell'equazione di Coulomb, ora un ruolo simile viene svolto dall'esponente -1 della distanza R nella legge di Biot e Savart applicata al filo rettilineo. In ambedue i casi esiste una forte correlazione tra le proprietà fisiche dei campi e le proprietà geometriche dello spazio euclideo.

Per generalizzare la conclusione ottenuta nel caso della circuitazione di \mathbf{B} lungo una circonferenza, si considerino le due circonferenze concentriche l e l' di Fig. 36.20 e la retta r che le divide diametralmente. In base ai risultati precedentemente ottenuti, le circuitazioni del campo \mathbf{B} lungo le linee l e l' devono essere uguali tra loro. In simboli:

$$[36.42] \quad C_l(\mathbf{B}) = \oint_l \mathbf{B} \times d\mathbf{l} = C_{l'}(\mathbf{B}) = \oint_{l'} \mathbf{B} \times d\mathbf{l} = \mu_0 i.$$

Per ragioni di simmetria, gli integrali di linea estesi a una semicirconferenza hanno un valore pari alla metà della circuitazione estesa all'intera linea. Di conseguenza:

$$[36.43] \quad \int_{AJB} \mathbf{B} \times d\mathbf{l} = \int_{CKD} \mathbf{B} \times d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 i}{2}$$

e quindi, lungo il percorso $AJBCKDA$ si avrà che:

$$[36.44] \quad \oint_{AJBCKDA} \mathbf{B} \times d\mathbf{l} = \int_{AJB} \mathbf{B} \times d\mathbf{l} + \int_{BC} \mathbf{B} \times d\mathbf{l} + \int_{CKD} \mathbf{B} \times d\mathbf{l} + \int_{DA} \mathbf{B} \times d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 i}{2} + 0 + \frac{\mu_0 i}{2} + 0 = \mu_0 i.$$

Osserviamo che, nel calcolo precedente, gli integrali di linea lungo i percorsi BC e DA danno un contributo nullo alla circuitazione, poiché ogni tratto infinitesimo dl è perpendicolare al vettore \mathbf{B} .

Calcoliamo ora la circuitazione del campo magnetico \mathbf{B} generato sempre da un filo rettilineo percorso da corrente lungo la linea chiusa $AJBKCSDA$:

$$[36.45] \quad \oint_{AJBKCSDA} \mathbf{B} \times d\mathbf{l} = \int_{AJB} \mathbf{B} \times d\mathbf{l} + \int_{BC} \mathbf{B} \times d\mathbf{l} + \int_{CSD} \mathbf{B} \times d\mathbf{l} + \int_{DA} \mathbf{B} \times d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 i}{2} + 0 + \left(-\frac{\mu_0 i}{2}\right) + 0 = 0$$

dove $\int_{CSD} \mathbf{B} \times d\mathbf{l} = -\frac{\mu_0 i}{2}$ in quanto il verso di percorrenza è opposto al verso della linea di campo e quindi il prodotto scalare è negativo.

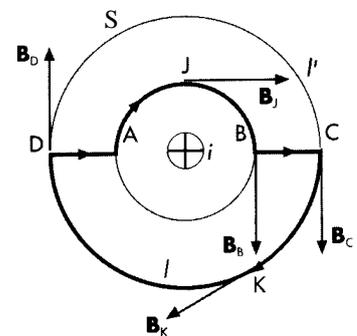


Fig. 36.20. Il conduttore isolato, al centro della figura, è percorso da una corrente di intensità i , con verso entrante nel foglio. Attorno al conduttore sono mostrate due linee di campo magnetico circolari, con centro nel conduttore. la circuitazione del campo \mathbf{B} , lungo la linea $AJBCKDA$, è $\mu_0 i$.

Osserviamo che la corrente i in questo caso non è concatenata col cammino chiuso considerato, in quanto non attraversa la superficie racchiusa dal cammino.

Il risultato ottenuto può essere generalizzato a percorsi qualsiasi, dimostrando che la circuitazione di \mathbf{B} , lungo qualsiasi linea chiusa, è comunque pari a $\mu_0 i$, dove i indica l'intensità della corrente che attraversa la linea considerata^(*) (**corrente concatenata con la linea**). A questo scopo, si consideri la situazione, del tutto generale, mostrata in Fig. 36.21. Ogni tratto infinitesimo del percorso l può sempre essere scomposto in un piccolo arco di circonferenza con centro nel conduttore e in un breve tratto diretto radialmente, in modo perfettamente analogo a quanto visto col percorso $AJBCKDA$ di Fig. 36.20.

Di conseguenza, anche lungo un percorso generico l , la circuitazione del campo \mathbf{B} è pari a $\mu_0 i$.

Si è così dimostrato che la circuitazione del campo \mathbf{B} lungo una qualsiasi linea, appartenente a un piano perpendicolare a un conduttore rettilineo indefinito, è proporzionale al valore della corrente i che percorre il conduttore.

Possiamo arrivare alla stessa conclusione, utilizzando adeguate tecniche di calcolo, considerando linee chiuse comunque disposte nello spazio, che circondano conduttori di forma generica (Fig. 36.22).

Osserviamo che, finora, si è scelto di percorrere la linea chiusa l nello stesso verso del vettore \mathbf{B} . Se si fosse scelta la convenzione opposta, di modo che i versi delle linee di campo e di percorrenza della linea l fossero tra loro opposti, il valore della circuitazione sarebbe stato negativo. In simboli, indicando con l' la linea l quando viene percorsa in senso opposto si ha che:

$$[36.46] \quad C_{l'}(\mathbf{B}) = -\mu_0 i$$

Si conclude allora che il modulo della circuitazione del campo \mathbf{B} , lungo qualsiasi linea chiusa l , al cui interno passi la corrente elettrica di intensità i (corrente concatenata con la linea l), è sempre proporzionale al valore della corrente i . Il segno della circuitazione è positivo o negativo, a seconda che il verso scelto per percorrere la linea chiusa coincida o sia opposto a quello delle linee di campo magnetico.

Questa affermazione, che costituisce la *legge della circuitazione di Ampère*, assume grande importanza nella conoscenza dei campi magnetici. Si consideri, infatti, che, se una stessa linea l circonda più conduttori percorsi da corrente, la circuitazione di \mathbf{B} è proporzionale alla loro somma algebrica (in questo caso le correnti si considerano positive o negative a seconda che il pollice della mano destra, quando le altre dita indicano il verso in cui si calcola la circuitazione, sia diretto nello stesso verso o in verso opposto a quello della corrente) (Fig. 36.23).
In simboli:

$$[36.47] \quad C_l(\mathbf{B}) = \mu_0 \sum_{j=1}^N i_j .$$

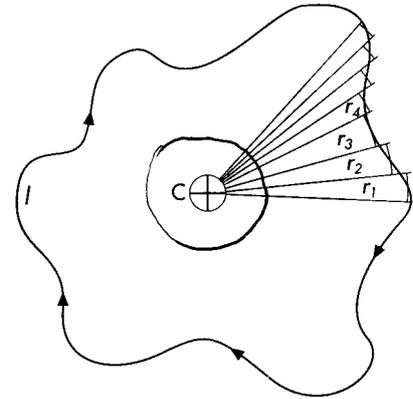


Fig. 36.21. La linea generica l può essere approssimata con un insieme di N archi di circonferenza, con centro nel conduttore C e raggio r_j ($j = 1, 2, \dots, N$), e N tratti radiali. Si ottiene così una linea continua cui si possono applicare N volte le operazioni mostrate in Fig. 36.20.

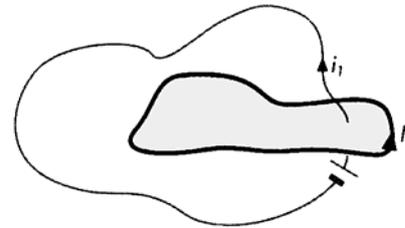


Fig. 36.22. La linea chiusa l e il conduttore percorso dalla corrente i_1 , sono concatenati fra loro. In questo caso, indipendentemente dalla loro forma o dalla loro posizione nello spazio, si ha che: $C_l(\mathbf{B}) = \mu_0 i_1$.

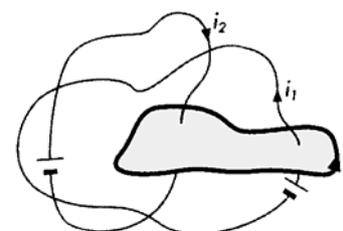


Fig. 36.23. La circuitazione del campo \mathbf{B} , calcolata lungo la linea l percorsa nel verso indicato dalla figura, è:

$$C_l(\mathbf{B}) = \mu_0 (i_1 - i_2).$$

^(*) Per evitare errate interpretazioni ricordiamo che la corrente i non percorre la linea l .

Possiamo quindi enunciare in modo definitivo la **legge della circuitazione di Ampère**:

La circuitazione del campo magnetico \mathbf{B} nel vuoto, calcolata lungo una qualsiasi linea chiusa l , è uguale al prodotto della costante di permeabilità magnetica μ_0 per la somma algebrica delle correnti concatenate con la linea considerata:

$$[36.48] \quad C_l(\mathbf{B}) = \oint_l \mathbf{B} \times d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_{j=1}^N i_j.$$

Osserviamo infine che una stessa linea chiusa può essere percorsa più volte o attorcigliarsi più volte attorno alla medesima corrente (Fig. 36.24). In questo caso, se la linea viene percorsa k volte nello stesso senso^(*), la circuitazione di \mathbf{B} è espressa da:

$$[36.49] \quad C_l(\mathbf{B}) = \mu_0 k i$$

In base ai risultati ottenuti, *si può affermare che il campo magnetico non è conservativo*. Infatti, perché un campo sia conservativo, occorre che la sua circuitazione, lungo qualsiasi linea chiusa sia nulla. Nel caso del campo magnetico è vero che esistono infinite linee chiuse lungo le quali la circuitazione di \mathbf{B} è nulla (per esempio tutte le linee che non circondano alcuna corrente elettrica), ma esiste almeno una linea chiusa (anzi, ne esistono infinite), lungo la quale la circuitazione di \mathbf{B} non è nulla.

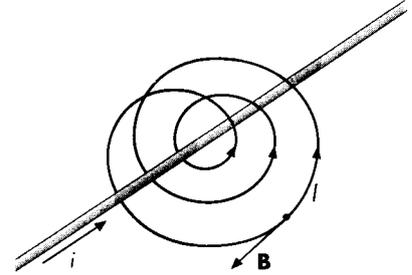


Fig. 36.24. La circuitazione del campo \mathbf{B} calcolata lungo la linea chiusa l è:

$$C_l(\mathbf{B}) = -3\mu_0 i.$$

(Si osservi il verso scelto per percorrere la linea l .)

36.9. Applicazioni della legge della circuitazione di Ampère

Calcolo, per mezzo della legge della circuitazione, della intensità del campo magnetico all'interno di un solenoide avente n spire per unità di lunghezza, in cui passa una corrente di intensità i .

Applichiamo il teorema della circuitazione al percorso chiuso costituito dal perimetro del rettangolo $ABCD$ orientato come in Fig. 36.25. Il contributo alla circuitazione lungo il lato CD esterno è nullo essendo trascurabile l'induzione magnetica; la stessa cosa può dirsi del contributo lungo i lati BC e DA , essendo questi perpendicolari al vettore \mathbf{B} ($\cos\theta = 0$). Pertanto la circuitazione di \mathbf{B} è solo quella lungo il lato AB interno al solenoide e parallelo alle linee del campo.

Se l è la lunghezza di AB , tenendo conto che \mathbf{B} è parallelo ed equiverso rispetto allo spostamento AB , la circuitazione risulta:

$$[36.50] \quad C(\mathbf{B}) = Bl.$$

D'altra parte, se indichiamo con N il numero di spire del solenoide che attraversano la superficie del rettangolo, la corrente totale concatenata con il cammino chiuso considerato è Ni . Per il teorema della circuitazione si ha pure:

$$[36.51] \quad C(\mathbf{B}) = \mu_0 Ni.$$

Dal confronto delle [36.50] e [36.51] si ricava il modulo del campo magnetico all'interno del solenoide:

$$[36.51] \quad B = \mu_0 \frac{N}{l} i.$$

Indicando con n il numero di spire per unità di lunghezza, cioè posto $n = N/l$, la precedente diventa:

^(*) Nel caso che la linea sia percorsa k_1 volte in un senso e k_2 volte in un senso opposto si può porre $k = k_1 - k_2$.

$$[36.52] \quad B = \mu_0 ni$$

cioè: Il vettore induzione magnetica all'interno di un solenoide è direttamente proporzionale all'intensità di corrente i che circola sulle sue spire e al numero n di spire per unità di lunghezza.

Calcolo, per mezzo della legge della circuitazione di Ampère, della intensità del campo magnetico generato da un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente i , ad una distanza d dal filo stesso.

(Si lascia come esercizio)

36.10. Le equazioni di Maxwell dei campi statici nel vuoto

Il flusso dei campi \mathbf{E} e \mathbf{B} attraverso una superficie chiusa S , e la loro circuitazione lungo una linea chiusa l , consentono di sintetizzare le proprietà dei campi elettrici e magnetici attraverso le equazioni:

$$[36.53] \quad \begin{aligned} [1] \quad \Phi_S(\mathbf{E}) &= \oint_S \mathbf{E} \times d\mathbf{A} = \frac{\sum_j q_j}{\epsilon_0} & [2] \quad \Phi_S(\mathbf{B}) &= \oint_S \mathbf{B} \times d\mathbf{A} = 0 \\ [3] \quad C_l(\mathbf{E}) &= \oint_l \mathbf{E} \times d\mathbf{l} = 0 & [4] \quad C_l(\mathbf{B}) &= \oint_l \mathbf{B} \times d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_j k_j i_j \quad \text{con } k_j \in Z \end{aligned}$$

che esprimono rispettivamente:

- [1] - la legge di Gauss per il campo elettrostatico;
- [2] - la legge di Gauss per il campo magnetico;
- [3] - la conservatività del campo elettrostatico;
- [4] - la legge della circuitazione di Ampère.

Nell'insieme delle equazioni [36.53] esistono alcune simmetrie formali. In particolare si può osservare che *la legge di Ampère svolge, per il campo magnetico, un ruolo simile a quello svolto dalla legge di Gauss per il campo elettrico*. Queste due leggi, infatti, stabiliscono che i valori delle sorgenti del campo, rispettivamente le cariche e le correnti elettriche, sono proporzionali, rispettivamente, al flusso e alla circuitazione dei campi \mathbf{E} e \mathbf{B} . Lo stesso "scambio di ruoli" tra flusso e circuitazione esiste anche tra le altre equazioni: sia la circuitazione di \mathbf{E} che il flusso di \mathbf{B} , infatti, hanno valore nullo. Queste proprietà possono essere giustificate analizzando le caratteristiche geometriche dei campi elettrici e magnetici. Sappiamo infatti che il campo elettrico è caratterizzato da linee di campo aperte, mentre le linee di campo magnetico sono sempre chiuse. Da questo segue che:

- il numero di linee di campo elettrico che attraversano una superficie chiusa deve essere proporzionale al valore della carica interna alla superficie (legge di Gauss);
- il numero delle linee di campo magnetico che entrano in una qualsiasi superficie chiusa deve essere pari a quello delle linee uscenti (flusso nullo);
- la circuitazione del campo \mathbf{E} è nulla;
- la circuitazione del campo magnetico \mathbf{B} , lungo una linea concatenata con una corrente elettrica non nulla, non può essere nulla: il suo valore deve essere proporzionale a quello dell'intensità di corrente concatenata con la linea (legge di Ampère); infatti, per la legge di Biot e Savart, il modulo di \mathbf{B} è proporzionale alla corrente.

Per concludere ricordiamo alcune proprietà e modalità di applicazione delle equazioni che sintetizzano le proprietà dei campi elettrostatici e magnetostatici:

- 1) il flusso del campo elettrico \mathbf{E} attraverso una superficie chiusa che non contiene cariche elettriche è sempre nullo;
- 2) la circuitazione del campo magnetico \mathbf{B} lungo una linea chiusa che non concatena correnti elettriche è sempre nulla;

- 3) se, all'interno di una superficie chiusa S , sono contenute più cariche elettriche $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$, il flusso del campo elettrico \mathbf{E} attraverso la superficie S , è:

$$[36.54] \quad \Phi_S(\mathbf{E}) = \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{\epsilon_0};$$

- 4) se una linea chiusa l è concatenata con più correnti elettriche $i_1, i_2, i_3, \dots, i_N$, (Fig. 36.26) la circuitazione del campo magnetico \mathbf{B} lungo la linea l è:

$$[36.55] \quad C_l(\mathbf{B}) = \mu_0 \sum_{j=1}^N i_j;$$

- 5) se una linea chiusa l , concatenata con una corrente i , viene percorsa N volte nello stesso senso, o si attorciglia N volte attorno alla stessa corrente, la circuitazione del campo magnetico \mathbf{B} è:

$$[36.56] \quad C_l(\mathbf{B}) = \mu_0 N i.$$

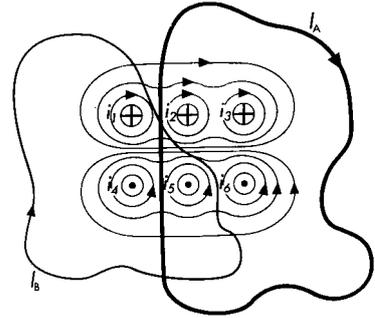


Fig. 36.26. Le circuitazioni del campo \mathbf{B} , calcolate percorrendo in senso orario le linee l_A e l_B , sono rispettivamente:

$$C_{l_A}(\mathbf{B}) = \mu_0 (i_2 + i_3 + i_5 + i_6);$$

$$C_{l_B}(\mathbf{B}) = \mu_0 (i_1 + i_4 + i_5).$$

N.B.: $i_4 < 0$; $i_5 < 0$; $i_6 < 0$.

Problemi di fine capitolo

- 36.1.** La legge di Gauss costituisce una delle quattro equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo. *In che modo tale legge rende conto della legge di Coulomb?*
- 36.2.** Dimostrare, con l'aiuto di un esempio, che il flusso del campo magnetico \mathbf{B} , generato da un qualunque circuito, attraverso una superficie cilindrica è nullo.
- 36.3.** Una superficie S_1 circolare di raggio R è disposta in modo tale che il suo piano forma con un campo vettoriale \mathbf{A} un angolo di 60° . Una seconda superficie S_2 circolare di raggio $2R$ è disposta in modo tale che il suo piano forma con lo stesso campo vettoriale \mathbf{A} un angolo di 45° . Determinare il rapporto tra il flusso di \mathbf{A} attraverso S_1 e quello attraverso S_2 .
- 36.4.** Trovare l'espressione del campo elettrico ad una distanza r da un filo di lunghezza indefinita e sezione trascurabile carico positivamente con una densità lineare di carica λ ($\lambda = \Delta q / \Delta l$) [R.: $E = \lambda / (2\pi\epsilon_0 r)$]
- 36.5.** Il campo elettrico in prossimità di una superficie sferica è 10 N/C , ed è diretto verso l'esterno della sfera. Assumendo che questo campo sia generato dalla carica presente sulla sfera, quanto vale tale carica?
- 36.6.** Due sfere metalliche cave concentriche Σ_A e Σ_B aventi rispettivamente raggi a e b ($a < b$) si trovano nel vuoto sufficientemente lontane da altri corpi per poter essere considerate un sistema isolato. Sulla sfera Σ_A è presente una carica Q_A mentre sulla sfera Σ_B una carica Q_B :
- determinare l'intensità del campo elettrico in un punto P a distanza r dal centro comune delle due sfere e con $a < r < b$;
 - determinare il potenziale elettrico in un punto P a distanza r dal centro comune delle due sfere e con $a < r < b$;
 - determinare l'intensità del campo elettrico in un punto S a distanza r dal centro comune delle due sfere e con $r > b$;
 - determinare il potenziale elettrico in un punto S a distanza r dal centro comune delle due sfere e con $r > b$.
- 36.7.** (a) Calcolare la circuitazione del vettore \mathbf{g} lungo un percorso quadrato di lato L posto in un piano verticale.
- (b) Calcolare la circuitazione del vettore \mathbf{g} lungo un percorso circolare di raggio R posto in un piano verticale.
- (c) La circuitazione del vettore \mathbf{g} lungo un percorso chiuso è sempre zero? Giustificare la risposta.

36.8. Calcolare la circuitazione del vettore campo elettrico \mathbf{E} tra due piastre cariche lungo un percorso triangolare (triangolo equilatero) posto in un piano parallelo al campo stesso (Fig. A).

ΔV fra le piastre = 1000 V;

Distanza tra le piastre = 10 cm;

Lato del triangolo = 2 cm;

Un lato del triangolo è parallelo al campo \mathbf{E}

36.9. Calcolare il valore della circuitazione di \mathbf{B} lungo le linee chiuse l_1, l_2, l_3 (Fig. B), nella ipotesi che $i_1 = 2.0$ A, $i_2 = 0.5$ A, e che il verso di percorrenza sia sempre quello antiorario.

36.10. Determinare l'unità di misura e le dimensioni della grandezza circuitazione di \mathbf{E} .

36.11. Determinare l'unità di misura e le dimensioni della grandezza circuitazione di \mathbf{B} .

36.12. Nella Fig. C, il cerchietto con il puntino al centro indica un filo rettilineo percorso da una corrente di 5 A uscente dal foglio e perpendicolare ad esso. Il contributo alla circuitazione del vettore \mathbf{B} lungo l'arco di cerchio AB di raggio 0.1 m vale mentre quello lungo il tratto BC di lunghezza 0.3 m vale mentre quello lungo l'arco di cerchio CD vale

36.13. Due piastre circolari di raggio 3.0 m e portanti la carica rispettivamente di $+2.0 \times 10^{-6}$ C e -2.0×10^{-6} C sono affacciate l'una sull'altra ad una distanza di 2 cm. Determinare il valore del campo elettrico in un punto all'interno delle piastre lontano dai bordi.

36.14. Il flusso di un vettore campo attraverso una superficie chiusa è uguale a
Enunciare questa legge per almeno quattro campi vettoriali.

36.15. La circuitazione di un vettore campo lungo una linea chiusa è uguale a
Enunciare questa legge per almeno quattro campi vettoriali.

36.16. Giustificare perché la superficie di un conduttore sferico deve essere una superficie equipotenziale.

