

## 42. IL PROBLEMA DEL CORPO NERO

### 42.1. Irraggiamento

Se si avvicina una mano a una lampada elettrica incandescente o a un ceppo incandescente in un caminetto, si avverte una sensazione definita di calore anche se non si tocca la lampada o il ceppo. Questo effetto di riscaldamento è dovuto solo secondariamente e in lieve misura alla conduzione e alla convezione, mentre è dovuto principalmente all'*irraggiamento*, il terzo processo con cui il calore può trasmettersi da punto a un altro<sup>1</sup>.

Si sa che in qualsiasi sostanza gli atomi sono continuamente in moto e che il grado di agitazione cresce con la temperatura. A qualsiasi temperatura, in particolare a temperature molto alte, hanno luogo urti<sup>2</sup> in cui una parte dell'energia cinetica degli atomi collidenti può essere assorbita dagli elettroni atomici. Gli atomi non conservano questa energia in eccesso per più di una minuscola frazione di secondo. Quando gli elettroni ritornano nella loro condizione normale nell'atomo, l'energia che è stata assorbita viene emessa sotto forma di *radiazione elettromagnetica*. Cioè, una parte dell'energia cinetica degli atomi in rapido moto è convertita in energia raggiante da questo processo.

Il tipo di radiazione elettromagnetica più familiare è la luce, la radiazione elettromagnetica che può essere percepita dall'occhio umano. Ma l'unica caratteristica della luce che la distingue dalle altre forme di radiazione elettromagnetica (quali le radioonde od onde hertziane, la radiazione infrarossa o termica e i raggi X) è la *frequenza* (o la *lunghezza d'onda*). Per esempio, i raggi X e la radiazione ultravioletta hanno frequenze maggiori di quelle della luce, mentre le radioonde hanno frequenze minori.

Quando un corpo non infiammabile viene riscaldato, la frequenza della radiazione che emette cresce al crescere della temperatura, è un fatto sperimentale. A temperature inferiori a circa 1000 K, l'energia emessa è costituita da radiazione di "grande" lunghezza d'onda (radiazione infrarossa); a queste temperature, si avverte facilmente la radiazione termica, ma è emessa pochissima radiazione visibile (luce) e il corpo non emette alcun "bagliore" percepibile dall'occhio. A 2000 K, l'energia emessa dal corpo contiene una quantità di radiazione visibile (luce) sufficiente perché l'occhio possa percepire un bagliore di colore rosso smorto proveniente dal corpo. Man mano che la temperatura cresce ancora, il colore predominante della luce emessa passa al rosso brillante, quindi al giallo e infine al bianco-azzurro. A una temperatura di 6000 K (la temperatura della superficie del Sole), viene emessa più luce gialla che qualsiasi altro colore (e perciò il disco solare appare giallo). A 20000 K, il colore predominante è il bianco-azzurro. (Questa temperatura non può essere raggiunta sulla Terra, tranne che durante brevissimi intervalli di tempo in particolari condizioni di laboratorio, ma è quella di alcune stelle particolarmente calde.) Sul fatto che il colore della luce emessa da un corpo dipende dalla sua temperatura si basa il funzionamento di uno strumento (chiamato pirometro) destinato alla misurazione di temperature molto alte.

Quando un corpo riceve energia termica (calore, ma non solo), la sua temperatura aumenta<sup>3</sup>. La Terra riceve continuamente dal Sole grandi quantità di energia raggiante e tuttavia la sua temperatura rimane (in media) sostanzialmente costante. Perché? La ragione di ciò sta nel fatto che la Terra emette anche energia raggiante e la rapidità con cui l'energia viene emessa da un corpo dipende fortemente dalla sua temperatura. L'energia raggiante solare *assorbita* dalla Terra ne ha aumentato la temperatura a un punto tale che la rapidità con cui l'energia viene *emessa* dalla Terra è esattamente uguale a quella con cui viene assorbita (In realtà, la rapidità di emissione dell'energia da parte della Terra è lievemente maggiore della rapidità di assorbimento a causa del calore generato all'interno della Terra, dal decadimento delle sostanze radioattive naturali.)

La capacità di un corpo di emettere radiazione è caratterizzata da una grandezza chiamata *emettanza* o *emissività* e denotata con il simbolo  $\varepsilon$ . L'emettanza è un numero compreso fra 0 e 1. Un radiatore perfetto avrebbe  $\varepsilon = 1$ . I corpi scuri hanno di solito emissività pari a 0.9 o maggiore, mentre i corpi chiari lucidi hanno emettanza pari a 0.2 o minore. Per esempio, il nerofumo (fuliggine) ha  $\varepsilon = 0.95$ , mentre l'alluminio lucido ha  $\varepsilon = 0.05$ .

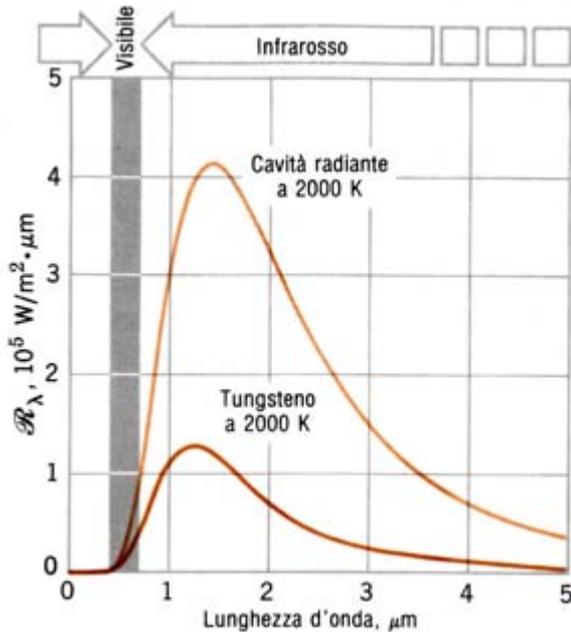
Qualsiasi corpo che sia un buon emettitore di radiazione è anche un buon assorbitore di radiazione. Si supponga di avere due fogli di alluminio identici e di lucidarne uno e di rivestire di nerofumo l'altro. Se,

<sup>1</sup> È opportuno ricordare il primo principio della termodinamica per avere una idea corretta della grandezza calore.

<sup>2</sup> Nel senso di interazioni.

<sup>3</sup> Si veda il primo principio della termodinamica.

dopo avere esposto i due fogli alla luce solare diretta e avere atteso che sia stata raggiunta la temperatura di equilibrio, si misura la temperatura di ciascun foglio, si trova che il foglio nero ha una temperatura molto maggiore di quella del foglio lucido. Questa differenza di temperatura è dovuta alla differenza di emissività fra i due fogli. Il foglio annerito assorbirà energia e aumenterà la propria temperatura finché la rapidità di assorbimento dell'energia non è esattamente bilanciata dalla rapidità di emissione. Il foglio lucidato, d'altra parte, riflette la maggior parte dell'energia incidente e ne assorbe relativamente poca. Perciò, questo foglio deve emettere, nell'unità di tempo, una quantità di energia molto minore di quella che deve essere emessa dal foglio annerito per mantenere una condizione di equilibrio; questa minore rapidità di emissione è raggiunta a una temperatura molto minore.



**Fig. 42.1.** La curva più bassa si riferisce alla radianza spettrale del tungsteno a 2000 K. La curva più alta riguarda la radianza spettrale di una cavità radiante alla stessa temperatura.

unità di area della sorgente, nell'intervallo di lunghezze d'onda comprese tra  $\lambda$  e  $\lambda+d\lambda$ . L'unità di misura di  $\mathcal{R}_\lambda$  nel SI è  $\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \mu\text{m})$ ; l'unità di misura corrispondente di  $\mathcal{R}_\lambda d\lambda$  è  $\text{W}/\text{m}^2$ . Nella misura di  $\mathcal{R}_\lambda$  si considera tutta la radiazione emessa nell'emisfero anteriore.

In certi casi interessa discutere l'energia totale emessa indipendentemente dalla lunghezza d'onda. Una grandezza adeguata allo scopo è la *radianza*  $\mathcal{R}$ , definita come l'energia emessa nell'unità di tempo e per unità di area nell'emisfero in avanti, con unità  $\text{W}/\text{m}^2$  nel SI. La si può ottenere integrando la radianza spettrale sull'intero spettro di lunghezze d'onda:

$$[42.1] \quad \mathcal{R} = \int_0^\infty \mathcal{R}_\lambda d\lambda$$

La radianza  $\mathcal{R}$  può essere considerata come l'area sotto la curva di  $\mathcal{R}_\lambda$  tracciata in funzione di  $\lambda$ . Nella Fig. 42.1, per il tungsteno a 2000 K quest'area, e quindi  $\mathcal{R}$ , è  $2.4 \times 10^5 \text{ W}/\text{m}^2$ . Si noti la somiglianza tra queste curve e le curve della distribuzione delle velocità di Maxwell del paragrafo 29.7 a pag. 365.

Per ogni materiale vi è una famiglia di curve come quella più bassa di Fig. 42.1, una per ogni temperatura. Se si confrontano queste famiglie di curve, non appaiono regolarità evidenti. Una loro interpretazione quantitativa sulla base di una teoria fondamentale<sup>5</sup> presenta notevoli difficoltà. Fortunatamente, dal punto di vista sperimentale e teorico, si scoprì che era possibile affrontare il problema, semplificandolo, considerando un corpo solido ideale ad alta temperatura, detto **corpo nero**, realizzabile mediante una cavità radiante.

Nel periodo 1860–1895 molti fisici erano intenti a studiare il problema dell'emissione ed assorbimento dei corpi, studio caratterizzato da una netta prevalenza dello sviluppo della teoria rispetto all'esperienza, in quanto la strumentazione a disposizione non permetteva passi significativi.

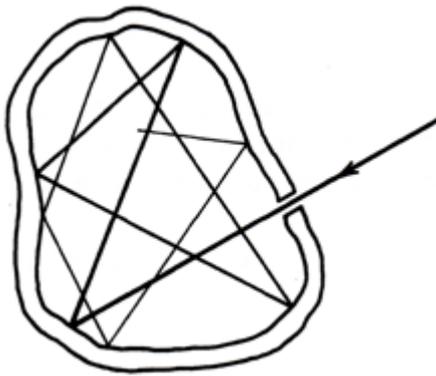
Nello sviluppo dello studio della radiazione dei corpi si può individuare una tappa fondamentale nell'anno 1860 in cui Kirchoff impostò in maniera rigorosa il problema e dette la definizione di "corpo nero", inteso come quel corpo ideale che assorbe tutta la radiazione che incide su di esso<sup>4</sup>.

Il nostro approccio inizia dalla descrizione della emissione della luce da parte di oggetti ad alta temperatura.

La curva più bassa in Fig. 42.1 illustra la *distribuzione della radiazione* emessa da un nastro incandescente di tungsteno a 2000 K, in funzione della lunghezza d'onda. Da notare il picco della radiazione emessa in corrispondenza di una determinata  $\lambda$ . La grandezza  $\mathcal{R}_\lambda$ , riportata sull'asse verticale in Fig.42.1, è la *radianza spettrale*. Essa è definita in modo tale che  $\mathcal{R}_\lambda d\lambda$  sia l'energia emessa nell'unità di tempo, per

<sup>4</sup> e quindi emette il massimo di radiazione, come vedremo.

<sup>5</sup> in questo caso occorre tenere conto sia della termodinamica che dell'elettromagnetismo.



**Fig.42.2.** Una cavità in un corpo collegata con l'esterno mediante un piccolo foro. La radiazione incidente sul piccolo foro viene completamente assorbita dopo successive riflessioni sulla superficie interna della cavità e quindi il piccolo foro *assorbe come un corpo nero*. Nel processo inverso, in cui la radiazione, prodotta dalla superficie interna, fuoriesce dal foro, il foro *emette come un corpo nero*.



**Fig. 42.3.** Un tubo di tungsteno incandescente con un forellino praticato sulla sua parete. La radiazione emergente dal foro è la radiazione di cavità.

Esso ha la proprietà che la distribuzione della luce emessa si rivela indipendente dalla natura del materiale e varia in modo semplice con la temperatura. Analogamente, in precedenza, si è trovato conveniente trattare prima le proprietà del gas ideale, piuttosto che analizzare le proprietà dell'enorme varietà dei gas reali. La cavità radiante rappresenta un solido ideale per quel che concerne le proprietà riguardanti l'emissione e l'assorbimento della luce. Nei prossimi paragrafi mostreremo come lo studio teorico della radiazione di cavità, eseguito del fisico tedesco Max Planck nel 1900, ha gettato le basi della moderna fisica quantistica.

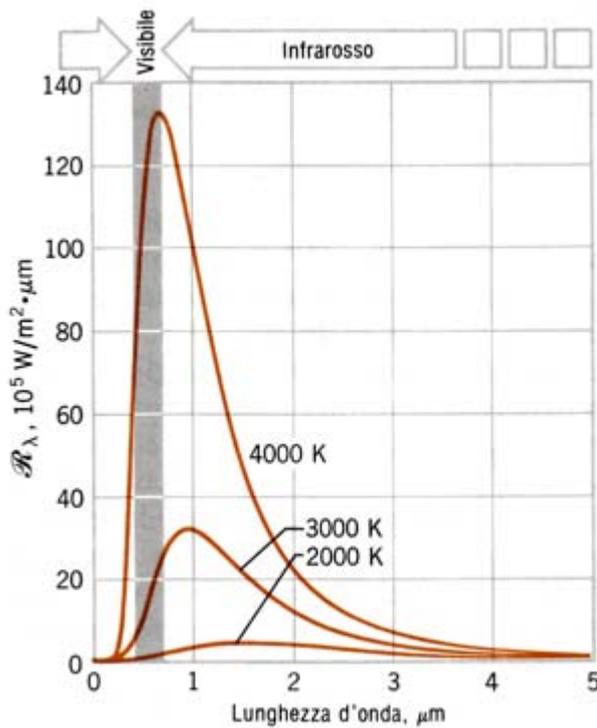
## 42.2. Radiazione di cavità

Una cavità radiante consiste di un blocco di materiale con una cavità interna, collegata alla superficie esterna del blocco mediante un piccolo foro. Il blocco viene riscaldato ad una temperatura uniforme (per esempio, 2000 K), misurata da un adeguato termometro. La radiazione che emerge dal forellino si dice *radiazione di cavità* la sua natura dipende solo dalla temperatura delle pareti della cavità e non dipende affatto dalla forma né dalle dimensioni della cavità, né dalla natura del materiale costituente le pareti della cavità.

Una cavità può essere considerata, oltre che come «emettitore», anche come «assorbitore» di luce. Se la cavità in questione si trova a temperatura ambiente ed è osservata alla luce ambientale, il forellino che penetra nel suo interno appare nero. La luce che entra attraverso il forellino (Fig.42.2), rimane dentro la cavità, che quindi si comporta come un assorbitore perfetto della luce incidente. Per questo motivo la radiazione di cavità si dice spesso **radiazione del corpo nero**.

La Fig. 42.3 mostra una reale cavità radiante, costituita da un cilindro cavo con pareti sottili di tungsteno, portato ad alta temperatura facendovi passare corrente elettrica. Il cilindro è montato in un bulbo di vetro, in cui si è fatto il vuoto, e sulla parete del cilindro è stato praticato un piccolo foro. Ammettiamo di aver costruito due altre cavità simili, ma con pareti di tantalio e di molibdeno e di aver portato tutte e tre le cavità alla stessa temperatura. Le misure della radianza  $\mathcal{R}$  e della radianza spettrale  $\mathcal{R}_\lambda$  presentano le seguenti proprietà:

- (1) A una data temperatura, la radianza del foro è identica per tutte e tre le cavità; le radianze delle tre superfici esterne sono tutte diverse tra loro e sono minori della radianza della cavità che vale  $9.00 \times 10^5$  W/m<sup>2</sup>, a 2000 K.
- (2) La radianza spettrale per la radiazione di cavità varia con la temperatura nel modo illustrato in Fig. 42.4. Queste curve dipendono solamente dalla temperatura e sono indipendenti dal tipo di materiale e dalla forma e dalle dimensioni della cavità. In pratica il potere emissivo di un corpo nero è, per ogni lunghezza



**Fig. 42.4.** La radianza spettrale della radiazione di cavità per tre diverse temperature. All'aumentare della temperatura il massimo della curva si sposta verso le lunghezze d'onda più corte (o le frequenze più alte).

d'onda (o frequenza), funzione esclusivamente della temperatura. Come Kirchhoff affermò a suo tempo "È compito della massima importanza determinare questa funzione. Grandi difficoltà si frappongono alla sua determinazione sperimentale. Tuttavia non appare priva di fondamento la speranza che essa abbia una forma semplice, come accade per tutte le funzioni indipendenti dalle proprietà dei singoli corpi e note finora".

- (3) La lunghezza d'onda  $\lambda_{\max}$  per cui la radianza spettrale di una cavità radiante presenta il suo massimo ad una data temperatura  $T$  (Fig. 42.4), è data dalla *legge dello spostamento di Wien*:

$$[42.2] \quad \lambda_{\max} \cdot T = \eta$$

dove  $\eta$  è una costante pari a  $2.8978 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ . La [42.2] in base ad essa è possibile prevedere che la lunghezza d'onda, in corrispondenza della quale si avrà la massima emissione di energia, diminuisce (ossia si sposta) al crescere della temperatura<sup>6</sup>. Ricordando che  $\lambda \cdot \nu = c$ , dove  $c$  è la velocità della luce nel vuoto, la [42.2] si può anche scrivere in termini di  $\nu_{\max}$ :

$$[42.3] \quad \frac{\nu_{\max}}{T} = \mu$$

dove la costante  $\mu$  vale  $1.038 \times 10^{11} \text{ Hz} \cdot \text{K}^{-1}$ .

- (4) La radianza di cavità varia con la temperatura in modo semplice:

$$[42.4] \quad \mathcal{R} = \sigma \cdot T^4 \quad (\text{radiazione di cavità})$$

dove  $\sigma$  è una costante universale, detta costante di Stefan-Boltzmann; il suo valore sperimentale è pari a  $5.67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$ . La [42.4] è la *legge dell'irraggiamento di Stefan-Boltzmann* (1884).

- (5) L'energia emessa dalle superfici esterne varia con la temperatura in modo complicato ed è diversa per materiali diversi. Spesso la si esprime come

$$[42.5] \quad \mathcal{R} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4$$

dove l'*emissività*  $\varepsilon$  dipende dal materiale e dalla temperatura ed è sempre minore di 1. Per i materiali delle nostre tre cavità, le emissività sperimentali a 2000 K sono 0.259 (tungsteno), 0.232 (tantalio) e 0.212 (molibdeno). Dalla [42.5] possiamo quindi ricavare una espressione per la potenza emessa  $P$ :

<sup>6</sup> Questa legge viene usata per determinare la temperatura superficiale delle stelle dall'analisi del loro irraggiamento.

$$[42.6] \quad P = \varepsilon \cdot A \cdot \sigma \cdot T^4$$

dove  $A$  è l'area in  $\text{m}^2$  della superficie emettitrice.

### Esempio

Un'ordinaria lampada elettrica a incandescenza contiene un sottile filamento di tungsteno che si riscalda a un'alta temperatura facendolo percorrere da un corrente elettrica. Un filamento tipico ha un'area di circa  $1 \text{ cm}^2$  e viene riscaldato a una temperatura di circa  $3000 \text{ K}$ . A questa temperatura, l'emissività del tungsteno è  $0.34$ . Qual è la potenza emessa da tale lampada?

*Soluzione:*

Usando la [42.6], si trova

$$P = \varepsilon \cdot A \cdot \sigma \cdot T^4 = 0.34 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \times 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4} \times (3000 \text{ K})^4 = 156 \text{ W}.$$

Questa potenza è vicina a quella della maggior parte delle lampade elettriche usate per l'illuminazione domestica. Ma si deve sottolineare che solo una piccola frazione (qualche per cento) della potenza emessa si manifesta sotto forma di luce, la maggior parte della potenza emessa da una lampada elettrica ordinaria si manifesta sotto forma di radiazione infrarossa (termica).

Il carattere universale della radiazione di cavità si può verificare mediante il dispositivo di Fig. 42.5. Vi sono disegnate due cavità in materiali diversi, di forme arbitrarie, ma con pareti alla *stessa temperatura*. La radiazione indicata con  $\mathcal{R}_A$  passa dalla cavità  $A$  alla cavità  $B$  e la radiazione indicata con  $\mathcal{R}_B$  si propaga in direzione opposta. Se queste due energie trasferite nell'unità di tempo non fossero eguali, una parte del blocco composto comincerebbe a passare a temperature più alte e l'altra parte a passare a temperature più basse, in violazione della seconda legge della termodinamica. Quindi si deve avere

$$[42.7] \quad \mathcal{R}_A = \mathcal{R}_B = \mathcal{R}_C$$

dove  $\mathcal{R}_C$  descrive la radiazione totale di qualsiasi cavità.

Non solo la radiazione totale, ma anche la distribuzione di energia radiante in funzione della lunghezza d'onda (o della frequenza) deve essere la stessa per ciascuna cavità in Fig. 42.5. Lo si può dimostrare applicando un filtro tra le aperture delle due cavità, scelto in modo tale che permetta il passaggio soltanto di una stretta banda di lunghezze d'onda. Con lo stesso ragionamento di prima, si può dimostrare che deve essere

$$[42.8] \quad \mathcal{R}_{\lambda,A} = \mathcal{R}_{\lambda,B} = \mathcal{R}_{\lambda,C}$$

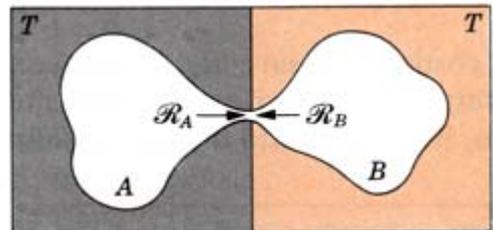
dove  $\mathcal{R}_{\lambda,C}$  indica la radianza spettrale di qualsiasi cavità.

Nel 1893 Wien combinando, come già aveva fatto Boltzmann, elettromagnetismo e termodinamica, ricavò per la radianza spettrale della radiazione in una cavità isoterma la seguente espressione semiempirica:

$$[42.9] \quad \mathcal{R}_\lambda = \frac{1}{\lambda^5} f(\lambda \cdot T)$$

dove  $f(\lambda \cdot T)$  è una funzione di cui si poteva solo affermare la dipendenza dal prodotto  $\lambda \cdot T$ .

Questa legge svolgerà un ruolo di fondamentale importanza nello sviluppo successivo dello studio della radiazione di corpo nero. Da allora in poi il problema teorico sarà infatti quello di mettere a punto una deduzione rigorosa dell'espressione della funzione  $f(\lambda \cdot T)$  o più modestamente, di trovarne in qualche modo un'espressione tale da interpolare i risultati sperimentali.



**Fig. 42.5.** Due cavità radianti, inizialmente alla stessa temperatura, poste in contatto.

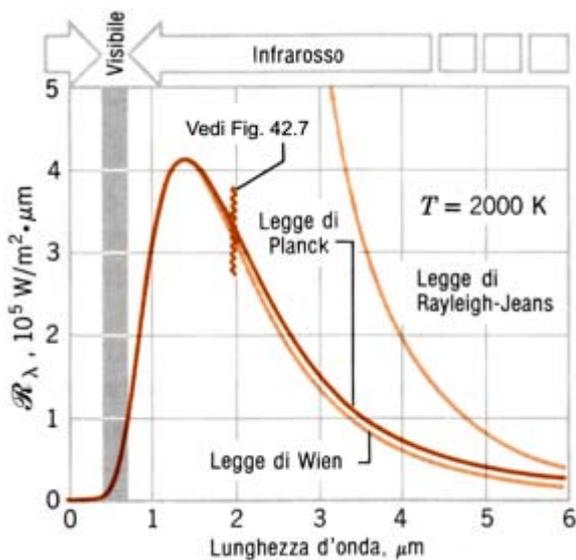
È peraltro opportuno sottolineare come la teoria della radiazione di corpo nero, a partire dai contributi di Boltzmann, si sviluppò mediante un uso congiunto di due teorie sorte e sino ad allora applicate in domini diversi: la termodinamica e l'elettromagnetismo. L'uso congiunto di due teorie sviluppate per descrivere insiemi di fenomeni diversi non è, in generale, ap problematico: infatti, nel caso in esame, i problemi che sorgessero condurranno, attraverso un percorso complesso, alla “svolta” di Planck del 1900.

Da ricordare lo sviluppo di alcune tecniche che si sarebbero mostrate essenziali per le ricerche sperimentali sulla radiazione di corpo nero. Nel 1881 l'astrofisico americano Langley metteva a punto il bolometro che, come rivelatore di radiazione, aveva una sensibilità di un ordine di grandezza superiore a quella delle termocoppie sino ad allora usate. Nel 1895 Lummer e Wien costruirono la prima sorgente di radiazione di corpo nero basata sull'idea della cavità isoterma. Inoltre, verso la fine del secolo, vennero messe a punto varie tecniche di monocromatizzazione della radiazione infrarossa che utilizzavano sia reticoli, sia la luce riflessa da varie sostanze in corrispondenza di forti assorbimenti. Questi progressi tecnici permetteranno di raccogliere, sulla distribuzione spettrale della radiazione di corpo nero, una messe di dati sempre più estesa nell'intervallo delle lunghezze d'onda e, tendenzialmente, sempre più accurata. In questa fase che può essere identificata con il periodo 1895-1900, l'interazione esperimento-teoria diventò molto vivace. Nel 1896 Wilhelm Wien suggerì, sulla base di considerazioni teoriche molto discutibili, per la legge di distribuzione spettrale della radiazione di corpo nero la forma:

$$[42.10] \quad \mathcal{R}_\lambda = \frac{c_1}{\lambda^5} e^{c_2/\lambda T}$$

dove  $c_1$  e  $c_2$  sono due costanti sperimentali. I nuovi risultati sperimentali sembravano confermare la correttezza della [42.10] al punto tale da indurre Planck, consapevole della debolezza teorica della proposta di Wien a cercarne una deduzione rigorosa.

### 42.3. La legge di Planck e la prima idea di “quanto”



**Fig. 42.6.** La curva più scura, che è in eccellente accordo con i dati sperimentali, è la legge di Planck per la radiazione di cavità a 2000 K. Sono anche riportate le curve per la stessa temperatura corrispondenti alle leggi di Wien e di Rayleigh-Jeans.

in cui  $c$  è la velocità della luce nel vuoto e  $k$  è la costante di Boltzmann, è in accordo con la [42.9] e si ottiene applicando il principio di equipartizione dell'energia (paragrafo 29.7, pag. 365) alla radiazione nella cavità.

Dalla Fig. 42.6 si vede che la [42.11] è vistosamente scorretta nell'intervallo di lunghezze d'onda riportato in quella figura. In effetti la curva di Rayleigh-Jeans non presenta un massimo relativo come quello che presenta la curva sperimentale, ma addirittura diverge quando la lunghezza d'onda tende a zero! Poiché il disaccordo tra la curva teorica e quella sperimentale si accentua “catastroficamente” quanto più la lunghezza d'onda diminuisce, ossia quanto più ci si avvicina alla regione dell'ultravioletto, ci si riferisce al

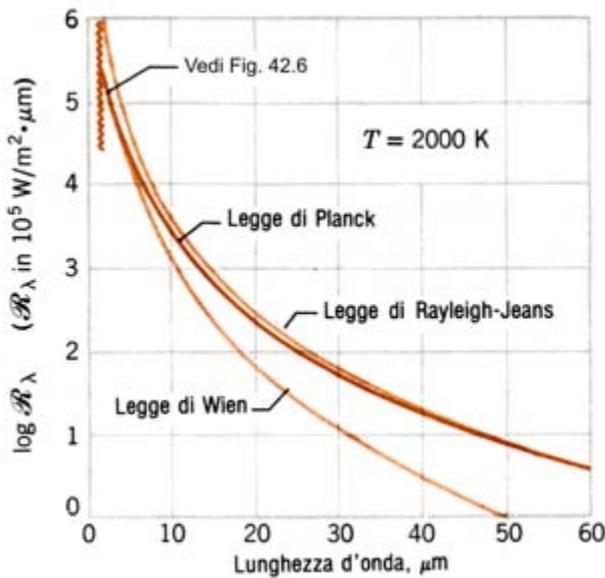
La spiegazione teorica della radiazione di cavità era uno dei più importanti problemi non risolti della fisica negli anni precedenti l'inizio del ventesimo secolo. Un certo numero di valenti fisici presentò delle teorie, basate sulla fisica classica, che però ebbero soltanto un successo limitato.

Come si vede nelle Figg. 42.6 e 42.7, la legge di Wien funziona piuttosto bene solo per lunghezze d'onda relativamente corte (alte frequenze). Ma per lunghezze d'onda crescenti, essa si discosta sempre di più dai dati sperimentali.

Questo è evidente non solo in Fig. 42.6, ma particolarmente in Fig. 42.7, che rappresenta la radianza spettrale (o meglio, il suo logaritmo) per lunghezze d'onda fino a 60  $\mu\text{m}$ , molto al di là del limite della curva di Fig. 42.6.

Anche Rayleigh dedusse una espressione matematica per la radiazione, elaborata in seguito da James Jeans. Questa legge di Rayleigh-Jeans:

$$[42.11] \quad \mathcal{R}_\lambda = \frac{2\pi c}{\lambda^4} kT,$$



**Fig. 42.7.** Le tre curve di Fig. 42.6 presentate per lunghezze d'onda molto più lunghe, a partire dalla linea ondulata verticale di quella figura ( $\lambda = 2 \mu\text{m}$ ). Si noti che la legge di Planck per la radiazione coincide con la legge di Wien per le piccole lunghezze d'onda e con la legge di Rayleigh-Jeans per le grandi lunghezze d'onda. Sull'asse verticale si è dovuto riportare  $\log \mathcal{R}_\lambda$ , invece di  $\mathcal{R}_\lambda$  stesso, a causa del grande intervallo di valori in questione.

problema chiamandolo *catastrofe ultravioletta*. Come si vede in Fig. 42.7, la relazione di Rayleigh-Jeans funziona invece piuttosto bene per lunghezze d'onda molto grandi, proprio dove la legge di Wien è palesemente scorretta.

Le leggi di Wien e di Rayleigh-Jeans rappresentano il meglio che la fisica classica può offrire circa la soluzione del problema della radiazione di cavità. Si vede che una relazione concorda con i dati sperimentali proprio dove l'altra è discordante, e viceversa; nessuna delle due espressioni è corretta nell'intero spettro delle lunghezze d'onda. Quindi i fisici a cavallo del ventesimo secolo erano di fronte ad un ben preciso e importante problema che la fisica del tempo non poteva spiegare. Occorrevano idee nuove.

Nel tentativo di conciliare le formule di Wien e di Rayleigh-Jeans, Planck trovò una intelligente interpolazione tra di esse che risultò perfettamente concordante con i dati sperimentali per tutte le lunghezze d'onda. La formula di Planck, comunicata alla Berlin Physical Society il 19 ottobre 1900, è

$$[42.12] \quad \mathcal{R}_\lambda = \frac{c_1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{c_2/\lambda T} - 1}$$

nella quale  $c_1$  e  $c_2$  erano delle costanti empiriche, adattate in modo che la [42.12] concordasse al meglio con i dati sperimentali (Figg. 42.6 e 42.7). Questa forma, per quanto interessante e importante, era ancora una legge empirica a questo stadio e non costituiva una teoria.

La [42.12] è, simboli a parte, la legge di distribuzione spettrale di Planck. La forma che noi oggi conosciamo venne ottenuta da Planck con un passo successivo teso a fornire un significato fisico ed un fondamento teorico alla felice interpolazione rappresentata dalla [42.12]. Questo passo sarà, come è noto, di portata storica. Nella memoria presentata alla riunione della Società Tedesca di Fisica del 14 dicembre 1900<sup>7</sup> compare infatti la legge di distribuzione spettrale di Planck nella versione oggi nota, includente quindi la costante "universale"  $h$ :

$$[42.13] \quad \rho(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

o ricordando che  $\lambda \cdot \nu = c$ :

$$[42.14] \quad \rho(\nu, T) = \frac{8\pi \nu^3 h}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{8\pi \nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

Nelle [42.13] e [42.14]  $\rho$  è la *densità di energia* definita come l'energia contenuta in una unità di volume della cavità (corpo nero) alla temperatura  $T$  nell'intervallo di lunghezze d'onda comprese tra  $\lambda$  e  $\lambda+d\lambda$  o nell'intervallo di frequenze comprese tra  $\nu$  e  $\nu+d\nu$  rispettivamente,  $c$  è la velocità della luce nel vuoto,  $k$  è la costante di Boltzmann il cui valore è  $1.38 \times 10^{-23}$  J/K,  $h$  è la costante di Planck il cui valore è  $6.626 \times 10^{-34}$  J·s.

<sup>7</sup> È questa la data di inizio di una nuova epoca per la fisica.

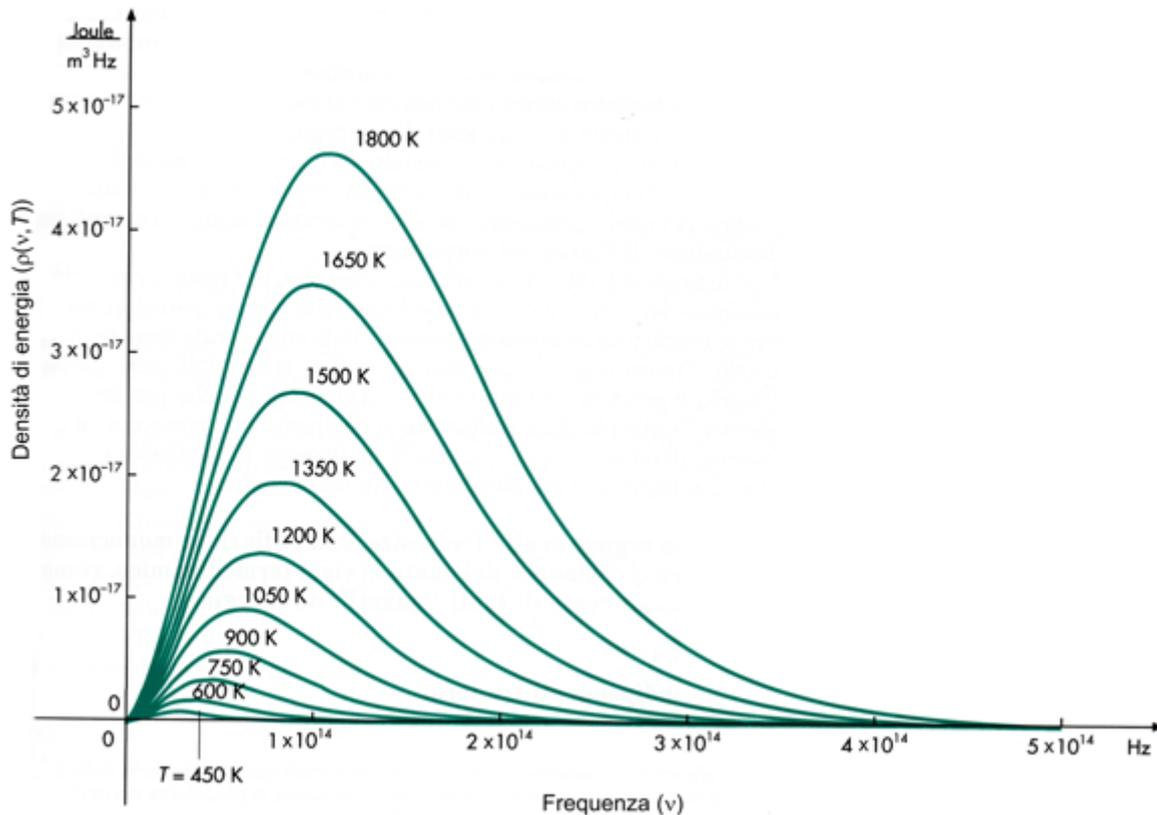


Fig. 42.8. Grafico della densità di energia radiante in funzione di  $\nu$  per diverse temperature (secondo Planck).

È evidente che  $\rho(\lambda, T) \propto \mathcal{R}_\lambda$  e che  $\rho(\nu, T) \propto \mathcal{R}_\nu$ , si può dimostrare che, ad esempio,  $\rho(\lambda, T) = \frac{4}{c} \mathcal{R}_\lambda$ . La

Fig. 42.8 rappresenta la [42.14] per diverse temperature.

Planck approdò alla [42.14] ragionando in termini di un modello dettagliato dei processi atomici che avvengono sulle pareti della cavità. Egli fece l'ipotesi che gli atomi che costituiscono queste pareti si comportassero come piccoli oscillatori elettrici, ciascuno con una frequenza di oscillazione caratteristica. Questi oscillatori emettono energia elettromagnetica nella cavità e assorbono energia elettromagnetica da essa. Quindi si possono dedurre le proprietà della radiazione di cavità da quelle degli oscillatori con cui essa è in equilibrio.

Planck fu indotto a fare due ipotesi fondamentali riguardanti gli oscillatori atomici. Queste ipotesi sono le seguenti:

- (1) Un oscillatore non può avere qualsiasi valore di energia ma solo i valori dati da

$$[42.15] \quad E = nh\nu,$$

dove  $\nu$  è la frequenza di oscillazione,  $h$  è una costante (ora detta *costante di Planck*) e  $n$  è un numero (ora detto *numero quantico*) che può assumere solo valori interi positivi. La [42.15] implica che l'energia degli oscillatori è *quantizzata*.

- (2) Gli oscillatori non emettono energia secondo quantità continue, ma solo a "salti", ovvero per *quanti*. Questi quanti di energia vengono emessi quando un oscillatore passa da uno stato di energia quantizzato ad un altro. Allora, se  $n$  varia di un'unità, la [42.15] dice che viene emessa una quantità di energia data da

$$[42.16] \quad \Delta E = h\nu.$$

Finché un oscillatore rimane in uno dei suoi stati quantizzati non emette né assorbe energia.

Queste ipotesi erano rivoluzionarie e infatti lo stesso Planck per molti anni si trattenne da accettarle. In parole sue: "I miei inutili tentativi di far rientrare in qualche modo il quanto elementare di azione [cioè la grandezza  $h$ ] nell'ambito della teoria classica si protrassero per un certo numero di anni e mi costarono un grande sforzo".

Consideriamo l'applicazione delle ipotesi di Planck ad un oscillatore macroscopico come un sistema massa-molla. È opinione comune e fortemente radicata che si possano avere oscillazioni di questi sistemi per qualsiasi valore di energia totale e non solo per certi valori discreti. Quando questi oscillatori perdono energia (per attrito nel sistema massa-molla) sembra che l'energia meccanica o elettromagnetica diminuisca in modo continuo e non a "salti". Tuttavia non vi è nessun motivo nell'esperienza comune quotidiana per respingere le ipotesi di Planck in quanto contrarie al "senso comune", perché la costante di Planck risulta avere un valore molto piccolo, cioè

$$[42.16] \quad h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}.$$

Il seguente esempio chiarisce il concetto.

### Esempio

Un sistema massa-molla ha massa  $m = 1.0 \text{ kg}$  e costante elastica  $k = 20 \text{ N/m}$  e oscilla con ampiezza di  $10 \text{ mm}$ .

(a) Se la sua energia è quantizzata secondo la [42.15], quanto vale il numero quantico  $n$ ?

$$\text{La frequenza è } \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{20 \text{ N/m}}{1.0 \text{ kg}}} = 0.7 \text{ Hz}$$

$$\text{L'energia meccanica è } E = \frac{1}{2} k x_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} (20 \text{ N/m}) (1.0 \times 10^{-2} \text{ m})^2 = 1.0 \times 10^{-3} \text{ J}$$

$$\text{Dalla [42.15], il numero quantico è } n = \frac{E}{h\nu} = \frac{1.0 \times 10^{-3} \text{ J}}{(6.6 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}) \times (0.71 \text{ Hz})} = 2.1 \times 10^{30}.$$

(b) Se  $n$  varia di un'unità, quanto vale la variazione relativa di energia?

La variazione relativa di energia si ottiene dividendo la [42.16] per la [42.15], cioè

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{h\nu}{nh\nu} = \frac{1}{n} = 5 \times 10^{-31}$$

Quindi per oscillatori macroscopici i numeri quantici sono enormi e non si può mettere in evidenza il carattere quantizzato dell'energia. In modo analogo, in esperimenti macroscopici, non siamo in grado di apprezzare il carattere discreto della massa né il fatto che la carica è quantizzata, cioè non si può rivelare l'esistenza degli atomi né degli elettroni.

In virtù di queste due ipotesi, Planck riuscì a dedurre la sua legge della radiazione di cavità interamente su base teorica, ottenendo per le costanti  $c_1$  e  $c_2$  presenti nella [42.12], fino ad allora empiriche, i seguenti valori legati alla costante di Boltzman  $k$ , alla velocità della luce nel vuoto  $c$  e alla costante  $h$ , poi detta di Planck in suo onore:

$$[42.17] \quad c_1 = 2\pi c^2 h \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{hc}{k}.$$

## 42.4. L'ipotesi dei "quanti di luce" di Einstein

Fino al 1905 l'ipotesi di Planck che l'energia potesse assumere solo valori discreti fu considerata negli ambienti scientifici soprattutto un brillante artificio per ottenere una curva teorica in accordo coi dati sperimentali.

In uno dei tre articoli pubblicati in quell'anno, invece, Einstein mostrò con grande chiarezza che le conseguenze teoriche dell'ipotesi di Planck erano di più vasta portata.

L'interesse di Einstein per il corpo nero, proprio come quello di Planck, è il punto di arrivo di un lavoro teso a generalizzare il campo di applicazione della termodinamica con l'obiettivo di sviluppare una termodinamica statistica applicabile non solo ai gas come avveniva abitualmente), ma anche ad altri stati di aggregazione.

All'interno di questo lavoro, Einstein arriva a formulare delle espressioni per la temperatura, l'entropia e la probabilità di uno stato, ossia proprio per quelle grandezze che sono concettualmente più carenti nella discussione di Planck sul corpo nero<sup>8</sup>.

Nell'articolo del 1905, Einstein sottolinea che, per quanto riguarda l'emissione del corpo nero, tutte le leggi ricavate da ipotesi in accordo con le teorie unanimemente ritenute valide sono errate mentre, al contrario, l'unica legge in accordo coi dati sperimentali, cioè quella di Planck, è priva di sostegno teorico. Dimostra poi che per frequenze elevate l'entropia della radiazione si comporta non come quella di un insieme di onde, ma come quella di un insieme di particelle materiali che si comportano classicamente.

Ne deduce che:

***in regime di alte frequenze, una radiazione monocromatica si comporta, dal punto di vista termodinamico come se consistesse di tanti "quanti" di energia:***

$$E=h\nu$$

***indipendenti tra loro.***

Inoltre ed è per questo che riceverà il premio Nobel nel 1922<sup>9</sup>, formula un principio euristico, in base al quale estende le proprietà della radiazione libera anche alle interazioni tra luce e materia. Afferma infatti che se una radiazione monocromatica si può supporre formata da quanti di energia  $h\nu$ , è "...naturale chiedersi se le leggi di emissione e trasformazione della luce non siano anch'esse strutturate come se la luce consistesse di quanti di energia di questo tipo".

La formulazione del principio euristico consente ad Einstein di ottenere due importanti risultati: il primo presentato nello stesso articolo del 1905 e che verrà trattato in seguito, relativo all'interpretazione dell'effetto fotoelettrico; il secondo, presentato in un articolo del 1906, in cui l'ipotesi di Planck viene reinterpretata in termini di quanti di luce.

Così scrive Einstein in proposito: "*Nel periodo (in cui pubblicai quel punto di vista) la teoria della radiazione di Planck mi sembrava in un certo senso, l'antitesi della mia. Nuove considerazioni... mi dimostrarono comunque, che le basi teoriche sulle quali poggia la teoria della radiazione di Planck, sono diverse da quelle della teoria di Maxwell e della teoria dell'elettrone. La differenza, inoltre, consisteva esattamente nel fatto che la teoria di Planck fa implicitamente uso dell'ipotesi del quanto di luce...*".

La logica del ragionamento di Einstein è, come al solito, esemplare per la capacità di evidenziare i termini del problema e la chiarezza nell'esplicitare le assunzioni da farsi per arrivare alla soluzione proposta. Egli inizia col sottolineare che la legge di radiazione di Planck è incompatibile con le basi teoriche che costituiscono il suo punto di partenza, dato che in essa compaiono contemporaneamente termini come  $(8\pi\nu^2/c^3)$  che derivano dall'ipotesi che i vari risonatori assorbano ed emettano energia con continuità, e termini come  $e^{\frac{h\nu}{kT}}$  che derivano invece dall'ipotesi che l'energia sia scambiata in maniera discontinua.

L'unico modo, secondo Einstein, di superare la contraddizione, consisteva nell'estendere l'ipotesi di discontinuità anche al termine  $(8\pi\nu^2/c^3)$ , di modo che anche la radiazione libera avesse una componente discreta. Quanto poco questo tipo di soluzione risultasse gradita ai fisici del periodo, e in particolar modo allo stesso Planck che pure, in un qualche modo, vedeva giustificate le sue ipotesi, è testimoniato dalle parole con cui Planck propone l'ammissione di Einstein all'Accademia prussiana delle Scienze: "*In breve, si può dire che non c'è quasi nessuno dei grandi problemi di cui la fisica moderna è così ricca, al quale Einstein non abbia dato un contributo rilevante. Che possa, a volte, aver mancato il bersaglio nelle sue congetture, come, per esempio, nel caso dell'ipotesi dei quanti di luce, non può essere in realtà considerato troppo grave: è impossibile infatti introdurre idee veramente nuove, neppure nelle più esatte delle scienze, senza correre a volte qualche rischio.*"

<sup>8</sup> Planck era ben cosciente di tali carenze concettuali quando, parlando della definizione di probabilità che aveva utilizzato, ne riconosceva la plausibilità ma anche l'esigenza di una conferma sperimentale.

<sup>9</sup> Il nome di Einstein era comparso regolarmente, sin dal 1910, tra le "nominations" che il Comitato riceveva (e riceve) da un selezionato pool di studiosi di tutto il mondo. Tuttavia, in quell'epoca di forti passioni, sistematicamente alcuni membri del Comitato si opposero ad ogni tentativo di concedere il riconoscimento ad Einstein, soprattutto per la loro forte predilezione verso gli aspetti sperimentali che li portava a considerare la Teoria della Relatività troppo speculativa perfino "filosofica". Dopo le conferme sperimentali arrivate nel 1919 e la crescente popolarità di Einstein, la rigida posizione di gran parte del Comitato divenne sempre più ingiustificabile. Riuscì a sbloccarla il fisico svedese Carl Wilhelm Oseen, che propose di premiare Einstein nel 1922 con il premio non assegnato nel 1921, ma non per la Teoria della Relatività, bensì per la scoperta della legge dell'effetto fotoelettrico. Einstein ricevette la notizia nel novembre del 1922, ormai in viaggio verso il Giappone e non riuscì a partecipare alla tradizionale cerimonia che si svolse (come avviene ancora oggi) a Stoccolma il 10 dicembre, anniversario della morte del fondatore Alfred Nobel.

Le ragioni di un simile atteggiamento, sono, almeno col senno di poi, facilmente comprensibili. Mentre l'ipotesi di Planck si riferiva all'interazione tra radiazione e materia, campo in cui allora (e anche oggi peraltro), si avevano poche certezze, l'ipotesi dei quanti di luce di Einstein si estendeva alla propagazione della luce nel vuoto, ambito che si riteneva perfettamente descritto dalle equazioni di Maxwell.

In altri termini l'ipotesi dei quanti tornava a riproporre, in un certo senso, quella visione "corpuscolare" della luce che sembrava ormai definitivamente superata, senza avere a sostegno nessuna seria prova di carattere sperimentale (le conferme alla correttezza dell'ipotesi dei quanti di luce, che Einstein stesso aveva proposto, avverranno circa dieci anni dopo la sua formulazione).

Del resto, ancora nel 1951, Einstein scriveva a proposito dei quanti di luce: "Tutti questi cinquant'anni di continuo almanaccare non hanno affatto avvicinato la risposta alla domanda. Che cosa sono i quanti di luce?".

## Problemi di fine capitolo

- 42.1.** La radianza di un nastro liscio, non ossidato, di tungsteno a 2000 K, è  $2.4 \times 10^5 \text{ W/m}^2$ . Quanto vale la sua emissività a quella temperatura? [R. 0.26]
- 42.2.** Quanto vale la potenza irradiata da un filo di nichel-cromo lungo 1.0 m e di diametro 1.5 mm, alla temperatura di 900 °C? L'emissività del nichel-cromo a questa temperatura è 0.092.
- 42.3.** Una lampada di 100 W ha un filamento incandescente di tungsteno di diametro 0.40 mm e lunghezza in estensione di 30 cm. L'emissività efficace in condizioni d'uso è 0.21. Quanto vale la temperatura d'uso del filamento? [R. 2170 K]
- 42.4.** La costante solare ( $= 1390 \text{ W/m}^2$ ) è la potenza della radiazione inviata dal Sole per unità d'area verso la Terra; essa viene misurata appena al di fuori dell'atmosfera terrestre e perpendicolarmente ai raggi solari. Quanto vale la potenza media per unità d'area (misurata lungo la normale alla superficie terrestre) con cui la Terra reirradia nello spazio? A quale temperatura media superficiale della Terra corrisponde questo fatto? Si ammetta che la Terra irradia come una cavità radiante, cioè che la sua emissività valga 1.
- 42.5.** Il Sole, il cui raggio è  $6.96 \times 10^5 \text{ km}$ , emette radiazione con potenza di  $3.90 \times 10^{26} \text{ W}$ . (a) Quanto vale la radianza  $\mathcal{R}_s$  della superficie solare? (b) Quanto vale la temperatura superficiale efficace del Sole? Si ammetta che la radiazione emessa sia in equilibrio termico con la materia della superficie solare, cioè che il Sole emetta radiazione di cavità. (c) La massa della Luna è  $7.4 \times 10^{22} \text{ kg}$ . Quanto vale la massa equivalente, misurata in frazioni di massa lunare, dell'energia irradiata in un anno dal Sole? [R. (a)  $6.41 \times 10^7 \text{ W/m}^2$ ; (b) 5800 K; (c)  $1.9 \times 10^{-6}$  masse lunari]
- 42.6.** Un forno, con temperatura interna  $T_0 = 227 \text{ °C}$ , si trova in una stanza alla temperatura  $T_1 = 27 \text{ °C}$ . In un lato del forno c'è una piccola apertura di  $5.0 \text{ cm}^2$  di area. Quanto vale la potenza netta trasferita dal forno alla stanza? (*Suggerimento*: si considerino sia il forno che la stanza come cavità).
- 42.7.** La lunghezza d'onda  $\lambda_{\text{max}}$  per cui la radianza spettrale di una cavità radiante presenta il suo massimo ad una data temperatura  $T$  (Fig. 42.4), è data dalla *legge dello spostamento di Wien* [42.2]. La temperatura superficiale efficace del Sole, calcolata nel problema 5, è pari a 5800 K. Per quale lunghezza d'onda ci si attende che il Sole irradia maggiormente? [500 nm, giallo]
- 42.8.** Dimostrare che la *legge della radiazione di Wien* [42.10] è un caso particolare della legge della radiazione di Planck [42.12], valido per corte lunghezze d'onda oppure per basse temperature; si vedano le Figg. 42.6 e 42.7.
- 42.9.** Dimostrare che la *legge della radiazione di Rayleigh-Jeans* [42.11] è un caso particolare della legge della radiazione di Planck [42.12], valido per grandi lunghezze d'onda oppure per alte temperature; si vedano le Figg. 42.6 e 42.7.
- 42.10.** In fisica, la carica è quantizzata? E la massa? Descrivi alcuni esperimenti che confermano le tue risposte.
- 42.11.** Dimostrare che la costante di Planck ha le dimensioni di un momento angolare. Questo significa necessariamente che il momento angolare sia una grandezza quantizzata?
- 42.12.** Che ordine di grandezza dovrebbe avere  $h$  per poter osservare effetti quantistici nella vita quotidiana? (Per una gustosa volgarizzazione di un mondo in cui le costanti  $c$ ,  $G$  e  $h$  appaiano evidenti, si veda "Le avventure di Mr. Tompkins" di G. Gamow, Edizioni Dedalo, Bari, 1997).