

44. ONDE E PARTICELLE

44.1. La diffusione Compton

Einstein nel 1916 estese il suo concetto di fotone asserendo che, nell'interazione tra luce e materia, i fotoni non cedono solo energia ma anche quantità di moto. E allo stesso modo dell'energia la quantità di moto viene trasferita in quantità discrete e in posizioni puntiformi anziché distribuite.

Abbiamo visto che un fotone ha energia $E = h\nu$, inoltre, dalla relatività sappiamo che per un fotone il modulo della sua quantità di moto, in unità di massa, è $p = E/c$, quindi per un fotone di frequenza ν il modulo della sua quantità di moto in unità convenzionali è

$$[44.1] \quad p_{\text{con}} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

per cui, ad esempio, un fotone di raggi X ($\lambda \sim 50$ pm) possiede maggior energia e maggior quantità di moto di un fotone di luce ($\lambda \sim 500$ nm = 5×10^5 pm).

Alcuni anni dopo, nel 1923 Arthur Holly Compton all'università G. Washington di St. Louis (USA) eseguì un esperimento che fornì solida prova alla teoria della quantità di moto posseduta dai fotoni. Si predispose a bombardare un bersaglio di grafite T con un fascio di raggi X di lunghezza d'onda λ (Fig. 44.1). Egli misurò, in funzione della lunghezza d'onda, l'intensità dei raggi X diffusi dal bersaglio in diverse direzioni.

La Fig. 44.2 illustra i risultati sperimentali delle misure. Si vede che, sebbene il fascio incidente consista essenzialmente di fotoni X di lunghezza d'onda $\lambda = 71.1$ pm, i raggi X diffusi presentano due picchi di intensità a due lunghezze d'onda diverse; un picco alla stessa lunghezza d'onda del fascio incidente, mentre l'altro (λ') ad una lunghezza d'onda superiore di una quantità $\Delta\lambda$. Questo *spostamento Compton* $\Delta\lambda$ varia a seconda dell'angolo da cui si osserva la diffusione dei raggi X.

Il risultato di Fig. 44.2 non può essere spiegato in ambito classico, se i raggi X incidenti sono considerati come un'onda elettromagnetica. In quest'ambito, l'onda incidente di frequenza ν induce un'oscillazione della stessa frequenza negli elettroni del bersaglio diffondente. Questi elettroni vibranti, come cariche che oscillano avanti e indietro nell'antenna di una radiotrasmittente, irraggiano onde elettromagnetiche che ancora una volta hanno la stessa frequenza. Così, secondo questa interpretazione, le onde diffuse dovrebbero avere la stessa frequenza e quindi solo la stessa lunghezza d'onda dell'onda incidente. Ma non è così.

Compton spiegò i suoi risultati sperimentali postulando che il fascio di raggi X si comporti non come un'onda, ma come un flusso di fotoni di energia, e che alcuni di questi fotoni siano soggetti a collisioni con gli elettroni liberi del bersaglio diffondente. Vediamo ora, prima concettualmente e poi quantitativamente, come questa interpretazione di meccanica quantistica porti a spiegare i risultati di Compton.

Supponete che un singolo fotone (di energia $E = h\nu$) sia interessato nell'interazione tra il fascio X incidente e l'elettrone fermo. In linea di massima il raggio X viene deviato (il fotone è diffuso) e l'elettrone rincula.

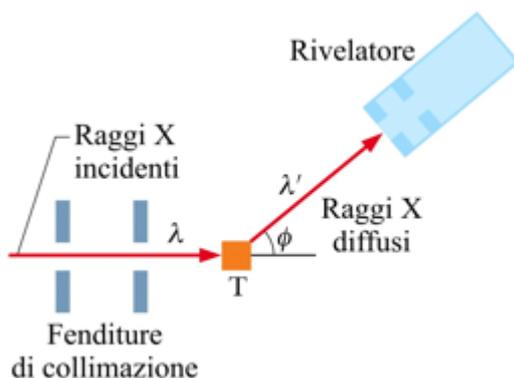


Fig. 44.1. Apparecchiatura usata per studiare l'effetto Compton. Un fascio di raggi X con lunghezza d'onda $\lambda = 71.1$ pm colpisce un bersaglio di grafite T. I raggi X diffusi dal bersaglio vengono rilevati a vari angoli ϕ rispetto alla direzione di incidenza. Il rivelatore misura sia l'intensità sia la lunghezza d'onda di questi raggi X diffusi.

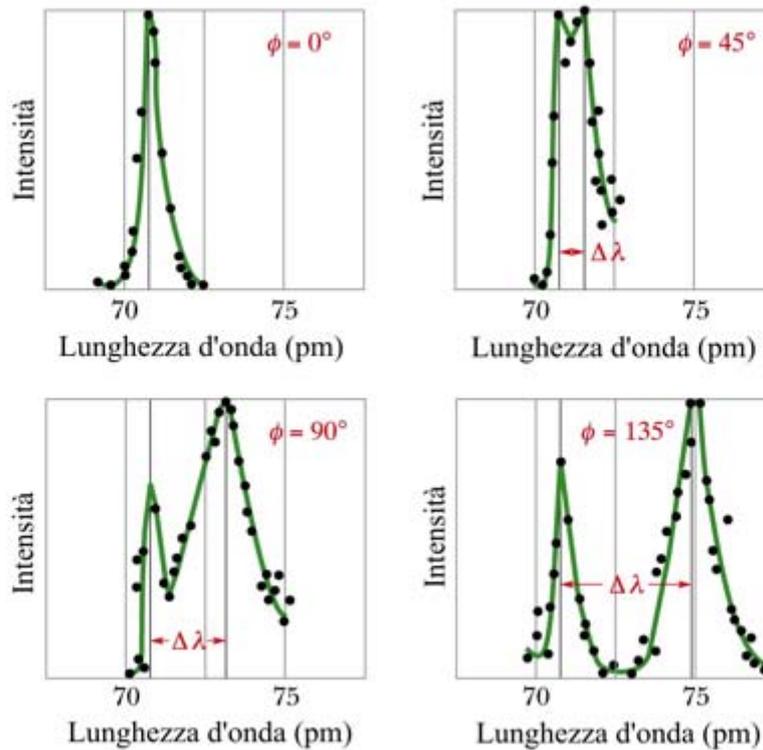


Fig. 44.2. I risultati di Compton per 4 valori dell'angolo di diffusione ϕ . Si noti che lo spostamento Compton $\Delta\lambda$ aumenta al crescere dell'angolo di diffusione.

Quest'ultimo assume quindi un po' di energia cinetica. Dato che l'energia si conserva nell'evento, l'energia del fotone diffuso ($E' = h\nu'$) sarà inferiore a quella del fotone incidente. Il fotone dopo l'urto vede quindi ridotta la propria frequenza a ν' e quindi accresciuta la lunghezza d'onda a λ' , proprio come dimostra l'esperimento di Compton e la Fig. 44.2.

La Fig. 3 illustra un urto tra un fotone X e un elettrone del bersaglio inizialmente fermo. Per un'analisi quantitativa, useremo per semplicità le unità di massa per poi passare alle unità convenzionali. Facciamo riferimento alle Figg. 44.3(a) e 44.3(c). Prima dell'urto abbiamo che E è l'energia iniziale del fotone X e m è l'energia a riposo dell'elettrone, mentre dopo l'urto E' sarà l'energia finale del fotone X e E_{el} l'energia finale dell'elettrone. Per la conservazione dell'energia avremo quindi

$$[44.2] \quad E' + E_{el} = E + m$$

da cui

$$[44.3] \quad E_{el} = E - E' + m.$$

Se indichiamo con p_{el} il modulo della quantità di moto dell'elettrone dopo l'urto, deve valere l'invarianza del quadrivettore energia-quantità di moto:

$$[44.4] \quad E_{el}^2 - p_{el}^2 = m^2$$

da cui si ottiene:

$$[44.5] \quad p_{el}^2 = E_{el}^2 - m^2.$$

Dato che il fotone X è privo di massa, si ha che il modulo della sua quantità di moto risulta uguale all'energia sia prima che dopo l'urto e cioè:

$$[44.6] \quad p = E$$

e

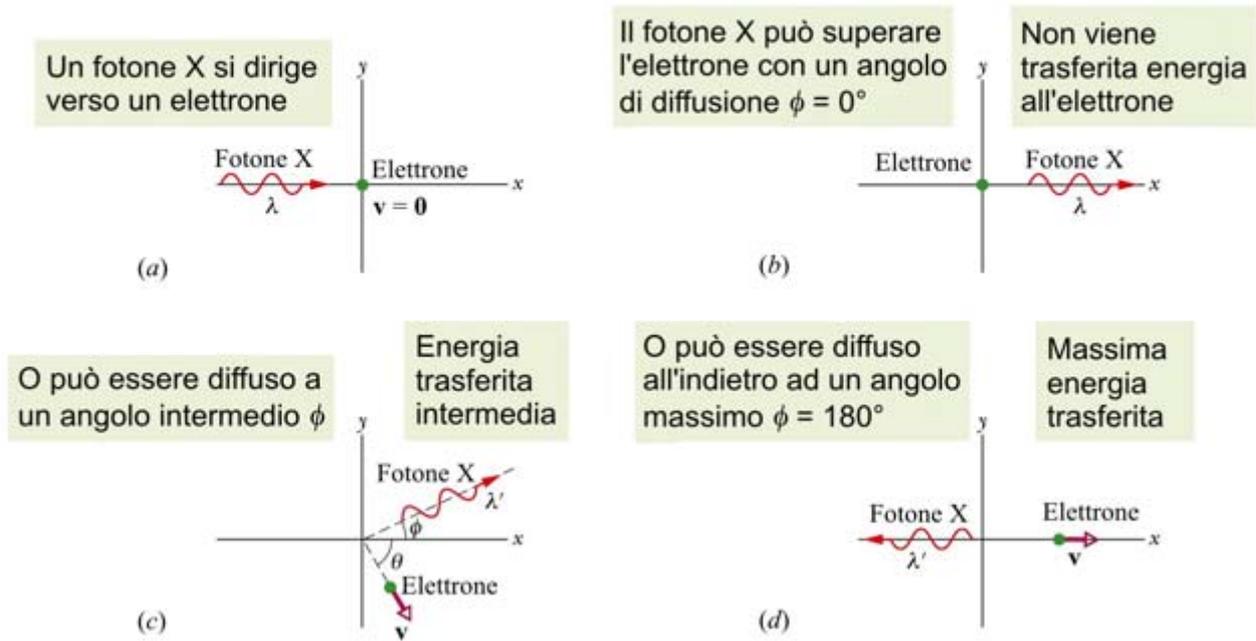


Fig. 44.3. (a) Un fotone X di lunghezza d'onda λ investe un elettrone a riposo. Il fotone X può (b) oltrepassare l'elettrone (diffusione in avanti) senza trasferimento né di energia né di quantità di moto, (c) essere diffuso ad un angolo intermedio con trasferimento di energia e quantità di moto, (d) essere diffuso all'indietro con un trasferimento massimo di energia e quantità di moto.

[44.7] $p' = E'$.

Per la conservazione della quantità di moto dovrà essere:

[44.8] $\mathbf{p}' + \mathbf{p}_{el} = \mathbf{p}$

che rappresenta un triangolo (Fig. 44.4) al quale si può applicare il teorema del coseno o di Carnot:

[44.9] $p_{el}^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \phi$.

Sostituendo nella [44.9] le relazioni [44.5], [44.6] e [44.7] si ottiene:

[44.10] $E_{el}^2 - m^2 = E^2 + E'^2 - 2EE' \cos \phi$.

Sostituendo nella [44.10] la [44.3] si ottiene:

[44.11] $(E - E' + m)^2 - m^2 = E^2 + E'^2 - 2EE' \cos \phi$

da cui:

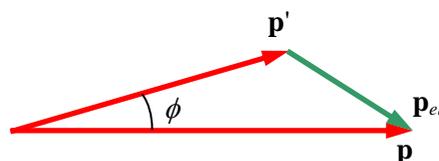


Fig. 44.4.

$$[44.12] \quad (E - E' + m)(E - E' + m) = E^2 + E'^2 - 2EE' \cos \phi$$

$$[44.13] \quad (E - E')(E - E' + 2m) = E^2 + E'^2 - 2EE' \cos \phi$$

$$[44.14] \quad (E - E')^2 + 2m(E - E') = (E - E')^2 + 2EE' - 2EE' \cos \phi$$

$$[44.15] \quad 2m(E - E') = 2EE'(1 - \cos \phi)$$

e infine:

$$[44.16] \quad \frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m}(1 - \cos \phi).$$

In unità convenzionali:

$$[44.17] \quad E'_{\text{con}} = h\nu' = \frac{hc}{\lambda'} \Rightarrow \frac{1}{E'_{\text{con}}} = \frac{\lambda'}{hc}$$

e

$$[44.18] \quad E_{\text{con}} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \frac{1}{E_{\text{con}}} = \frac{\lambda}{hc}$$

che sostituite nella [44.16] conducono a

$$[44.19] \quad \frac{\lambda'}{hc} - \frac{\lambda}{hc} = \frac{1}{mc^2}(1 - \cos \phi)$$

e finalmente a

$$[44.20] \quad \Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \phi)$$

che rappresenta lo *spostamento Compton*, ovvero lo spostamento della lunghezza d'onda dei fotoni diffusi.

La quantità $\frac{h}{mc} = 2.43 \times 10^{-12} \text{ m} = 2.43 \text{ pm}$ (chiamata *lunghezza d'onda Compton*) è una costante.

L'equazione [44.20] è in ottimo accordo coi risultati sperimentali di Compton.

Rimane da spiegare il picco della Fig. 44.2 in cui la lunghezza d'onda incidente $\lambda = 71.1 \text{ pm}$ non cambia. È il risultato della diffusione da parte di quegli elettroni che non sono liberi, come abbiamo sempre ipotizzato finora, ma strettamente legati agli atomi del bersaglio. Per il carbonio la massa efficace di questi elettroni è quella dell'intero atomo di carbonio, pari a circa $22000m$, ove m è la massa dell'elettrone. Se sostituiamo m dell'equazione [44.20] con $22000m$, si vede subito che lo spostamento Compton per gli elettroni legati diventa impercettibile, come risulta dalle osservazioni. I raggi X diffusi da questo tipo di urto (Fig. 44.3(b)) vengono rivelati con lunghezza d'onda praticamente immutata rispetto ai raggi X incidenti.

Quesiti

-
- 44.1.** Si fornisca una spiegazione qualitativa del perché in un urto tra un fotone ed elettroni in quiete si prevede che i fotoni diffusi abbiano una lunghezza d'onda maggiore.
- 44.2.** Supponiamo che un fascio di fotoni da 1.0 MeV sia diffuso da elettroni essenzialmente in quiete.
- (a) Qual è la lunghezza d'onda dei fotoni incidenti?
- (b) Qual è la lunghezza d'onda dei fotoni diffusi con un angolo di 30° ?
- 44.3.** Raggi X di lunghezza d'onda $\lambda = 1.00 \text{ \AA}$, sono diffusi da un bersaglio di carbonio. La radiazione diffusa viene osservata a 90° rispetto al fascio incidente.
- (a) Quanto vale lo spostamento Compton $\Delta\lambda$?
- (b) Quanta energia cinetica viene trasferita all'elettrone (Fig. 44.3(c))?

- (c) Quale percentuale dell'energia iniziale viene persa dal fotone nel caso (b)?
 (d) Sempre nel caso (b), quanta energia sarebbe stata persa percentualmente da un fotone con energia iniziale 10 volte maggiore?
 [R. (a) 0.0243 Å; (b) 295 eV; (c) 2.4%; (d) 20%]

44.2. Corpuscoli e interferenza: una nuova cinematica

L'associazione dell'energia di un singolo fotone alla frequenza dell'onda indica che le proprietà ondulatorie della luce possono essere osservate con singoli fotoni e non sono dovute a molti fotoni che si muovono insieme. Ciò significa che non dovrebbe esistere alcuna differenza tra la figura di interferenza prodotta da luce intensa durante un breve intervallo di tempo e quella prodotta da luce debole durante un lungo intervallo di tempo e che è realmente così fu dimostrato nel 1913 da Geoffrey Taylor, allora giovane studente dell'Università di Cambridge.

Taylor installò in una scatola impenetrabile alla luce una piccola lampada che proiettava l'ombra di un ago su una lastra fotografica (Fig. 44.5).

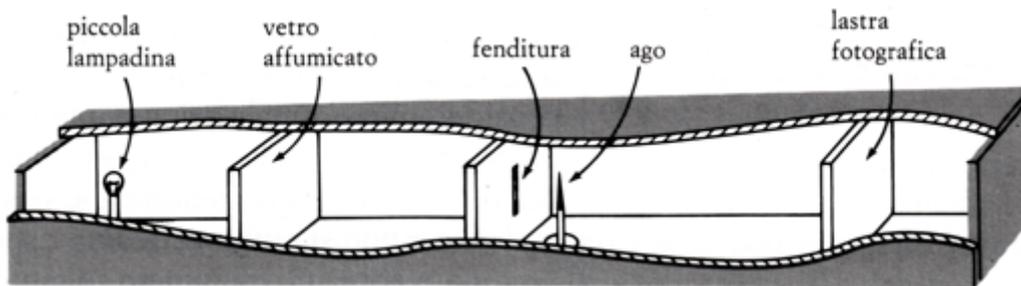


Fig. 44.5. L'esperimento di G.J. Taylor, che dimostrò che la figura di interferenza veniva ottenuta correttamente anche se nell'apparecchio era presente soltanto un fotone alla volta.

Scelse le dimensioni in modo che le bande di diffrazione attorno all'ombra dell'ago fossero chiaramente visibili, poi ridusse l'intensità della luce per cui furono necessarie esposizioni sempre più lunghe per ottenere una lastra esposta in modo soddisfacente. Infine fece un'esposizione della durata di parecchi mesi (che, come si racconta, dedicò allo sport della vela). Anche su questa lastra le bande di diffrazione furono perfettamente chiare, benché Taylor riuscisse a dimostrare che nel caso di questa luce molto debole nella scatola entrava soltanto un fotone alla volta. Questo dimostra quindi che l'interferenza avviene anche per un singolo fotone.

John King eseguì una versione moderna dell'esperimento nel Massachusetts Institute of Technology (MIT). Un disegno schematico dell'apparecchiatura usata da King è presentato nella Fig. 44.6. La luce si propaga attraverso la fenditura singola e viene diffratta. Colpisce poi lo schermo con la doppia fenditura e attraversandola produce la familiare figura di interferenza alla fine del percorso.

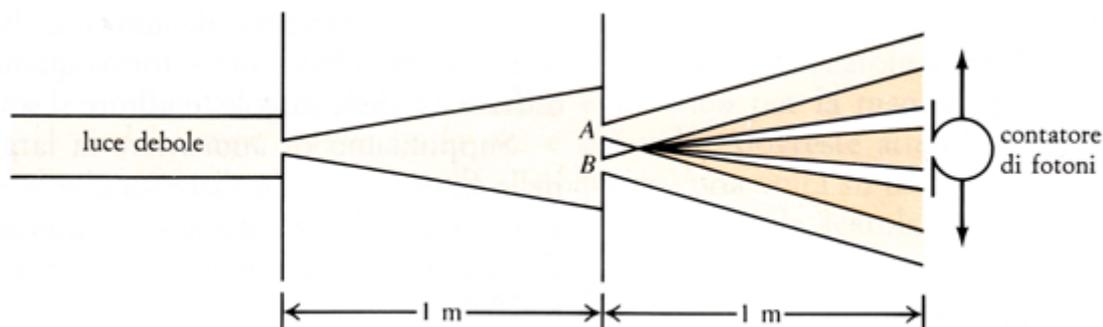


Fig. 44.6. Conteggio dei fotoni mediante l'esplorazione trasversale della figura di interferenza prodotta da una fenditura doppia. Le frange alternativamente luminose e oscure sono nella zona in cui il fascio di luce diffratto da una fenditura si sovrappone parzialmente su quello diffratto dall'altra.

Mediante un contatore di fotoni con una stretta fenditura di ingresso fu esaminata la figura di interferenza e furono contati i fotoni. Il risultato fu che dove il modello ondulatorio prevedeva un massimo, la frequenza di conteggio risultava massima e dove il modello ondulatorio prevedeva un minimo, la frequenza di conteggio era pressoché nulla.

L'intensità della luce era nell'intero esperimento così bassa che tra l'arrivo di un fotone e l'arrivo del fotone successivo trascorrevano solo circa 10^{-7} s. In questo lasso di tempo un fotone percorre uno spazio pari a $10^{-7} \text{ s} \times 3 \times 10^8 \text{ m/s} = 30 \text{ m}$ e secondo il modello corpuscolare questa sarebbe la distanza media tra i fotoni, se essi non venissero assorbiti dal contatore.

L'intera scatola con le fenditure era lunga soltanto circa 2 m e perciò, in media, il numero di fotoni nella scatola era molto minore di 1. Questo esperimento è un'altra chiara dimostrazione del fatto che l'interferenza è associata ai singoli fotoni.

Consideriamo ora un fotone che ha attraversato la fenditura singola ed è stato assorbito successivamente dal contatore. Attraverso quale delle due fenditure (A o B nella Fig. 44.6) è passato il fotone? Questa è una domanda logica nel caso delle particelle che si incontrano nella vita quotidiana, come le particelle di pittura spruzzate da una pistola a spruzzo su un foglio di carta. Si trova la risposta chiudendo una alla volta le due fenditure, spruzzando la pittura attraverso l'altra e osservando dove ciascun gruppo di particelle colpisce il foglio. Con uno spruzzo sufficientemente debole sarebbe possibile segnare il punto in cui ogni particella ha colpito il foglio. Non sorprende che i risultati sarebbero gli stessi sia che spruzzassimo la pittura con entrambe le fenditure aperte simultaneamente sia che la spruzzassimo prima attraverso una fenditura e poi attraverso l'altra.

Il caso della luce è diverso. Per produrre la figura di interferenza di Young è necessaria una fenditura doppia, se si chiude una delle due fenditure, la figura di interferenza scompare e ne conosciamo il motivo se consideriamo normali fenomeni ondulatori. Ma nel caso della luce l'onda descrive il moto di una singola particella e quindi la domanda «attraverso quale delle due fenditure è passato il fotone?» ha perso il suo significato e non si può fornire una risposta eseguendo un esperimento.

Finora abbiamo esaminato soltanto l'effetto della chiusura di una sola fenditura.

Che cosa accadrebbe se collocassimo minuscoli contatori sensibili dietro ogni fenditura per determinare attraverso quale fenditura è passato ciascun fotone?

Un'analisi particolareggiata del funzionamento di ciascun contatore indica che, nel caso di contatori con un'efficienza del 100%, la figura di interferenza scompare: possiamo o avere una figura di interferenza di Young o determinare attraverso quale fenditura passa un fotone, ma non possiamo ottenere entrambe le cose!

Abbiamo visto precedentemente che una figura di diffrazione prodotta da una doppia fenditura si forma quando i massimi centrali dei massimi di diffrazione delle singole fenditure si sovrappongono (paragrafo 8.6 a pag. 109).

Supponiamo di aumentare la larghezza di ciascuna delle fenditure nella Fig. 44.6 e la distanza che le separa, in modo che entrambe diventino grandi rispetto alla lunghezza d'onda della luce; la diffrazione diventa debole e i massimi di diffrazione non sono più sovrapposti (Fig. 44.7).

Una lastra fotografica esposta e sviluppata presenterà due aree annerite distinte e il risultato sarà lo stesso sia che le due fenditure siano aperte simultaneamente sia che vengano aperte una dopo l'altra.

Come nel caso dello spruzzo di pittura, siamo in grado di stabilire attraverso quale fenditura sono

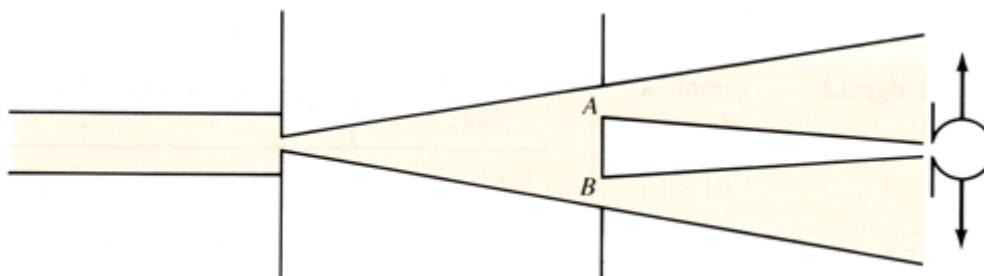


Fig. 44.7. Quando le due fenditure sono più larghe e più distanti che nella Fig. 44.6, i fasci diffratti non si sovrappongono.

passati i fotoni.

Il prezzo pagato per conciliare il modello ondulatorio e il modello corpuscolare della luce è alto: si è dovuto rinunciare al concetto di traiettoria precisa di un fotone. Il concetto di traiettoria si può conservare soltanto nelle situazioni in cui la larghezza delle fenditure o degli ostacoli è grande rispetto alla lunghezza d'onda; solo quando sono soddisfatte queste condizioni, possiamo considerare un raggio luminoso come la traiettoria di un fotone. Quando queste condizioni non sono soddisfatte, dobbiamo ricorrere al modello ondulatorio per determinare il luogo in cui è più probabile che si trovino i fotoni. Il quadrato dell'ampiezza dell'onda in una data posizione fornisce una misura della probabilità che ivi si trovi un fotone.

Quesiti

- 44.4.** L'occhio umano è capace di rivelare una luce debole di intensità pari a 100 fotoni/s. Qual è l'energia della luce per secondo che entra nell'occhio in corrispondenza di questa intensità della luce se essa ha una lunghezza d'onda di 600 nm?
- 44.5.** Nell'esperimento della durata di 3 mesi, Taylor calcolò che l'energia luminosa per secondo incidente sulla sua lastra fotografica era pari a 5×10^{-13} J/s. [Ottene questo valore confrontando l'annerimento medio della lastra con quello prodotto in 10 s da una candela distante 2 yd (iarde; 1 yd = 0.9144 m), senza alcuno schermo assorbente di vetro affumicato.] In base a questo valore, calcola la distanza media tra i fotoni nel modo seguente:
- Supponendo che la lunghezza d'onda della luce che impressionava la lastra fotografica fosse circa 500 nm. Quanta energia trasportava ciascun fotone?
 - Dal valore dell'energia luminosa per secondo, calcola il tempo medio che intercorre tra l'arrivo di due fotoni successivi.
 - In base a questo tempo medio, calcola la distanza media tra fotoni consecutivi.
 - Se ti chiedessero «quanti fotoni ci sono nella scatola a un dato istante?» dovresti rispondere «nessuno» per la maggior parte del tempo. Osservando più e più volte, ti dovresti aspettare di «vedere» un fotone nella scatola circa una volta su un certo numero di prove. Su quante? Supponi che la scatola sia lunga 1.2 m.
- 44.6.** Un fascio rettilineo di luce monocromatica attraversa una fenditura larga e incide su una lastra fotografica come è illustrato nella Fig. A(a). Sembra logico supporre che i fotoni che colpiscono la parte superiore della zona annerita siano passati attraverso la parte superiore della fenditura e che quelli che colpiscono la parte inferiore siano passati invece attraverso la parte inferiore della fenditura. Per verificare questa ipotesi è stata collocata una fenditura molto stretta in varie posizioni dietro la fenditura larga (Fig. A(b)). Per ciascuna di queste posizioni, viene esposta e sviluppata una lastra fotografica. Un esame delle lastre sarà utile per decidere se l'ipotesi è corretta o no? Spiegare.

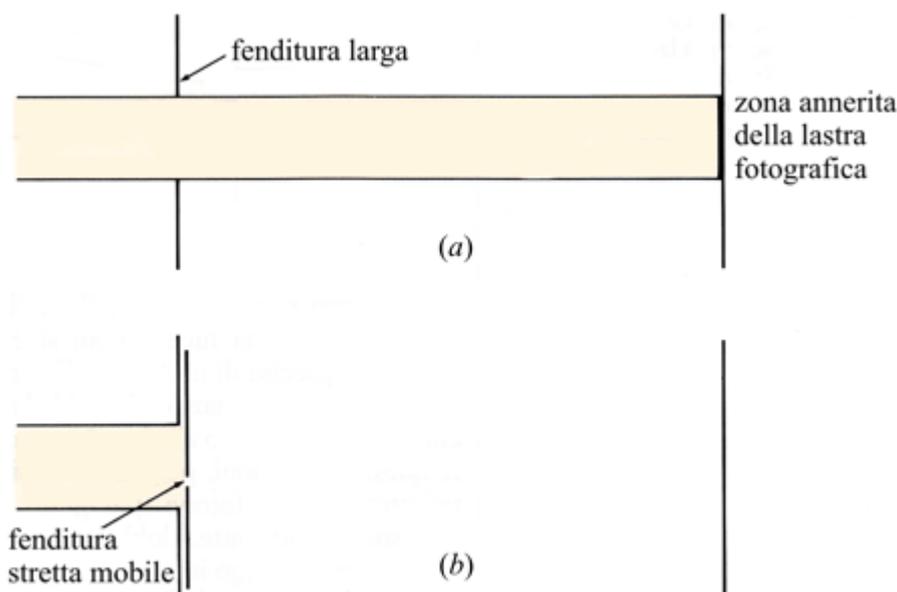


Fig. A.

44.3. La lunghezza d'onda di de Broglie

La relazione [43.9] a pag. 571 che lega l'energia e la lunghezza d'onda di un fotone può essere risolta rispetto a λ :

$$[44.21] \quad \lambda = \frac{hc}{E_{\text{fot}}}.$$

La [44.21] contiene sia la velocità della luce nel vuoto che la costante di Planck ed è valida solo per i fotoni. Dalla relatività sappiamo che il modulo della quantità di moto e l'energia di un fotone sono legati (in unità convenzionali) dalla seguente relazione:

$$[44.22] \quad p_{\text{fot}} = \frac{E_{\text{fot}}}{c}.$$

Combinando la [44.21] con [44.22] si ottiene:

$$[44.23] \quad \lambda = \frac{h}{p_{\text{fot}}}.$$

La [44.23] non contiene la velocità della luce mentre contiene la costante di Planck. Louis de Broglie fu incuriosito da questa relazione già nel 1924. Egli pose la seguente domanda: è possibile che anche particelle diverse dai fotoni evidenzino un comportamento ondulatorio? In particolare, una particella come un elettrone o un neutrone di quantità di moto p mostrerà le proprietà di un'onda di lunghezza d'onda

$$[44.24] \quad \lambda = \frac{h}{p} ?$$

Tali particelle mostrerebbero effetti di interferenza quando passano attraverso una doppia fenditura come fanno i fotoni?

Per constatare un effetto di dimensioni notevoli, la distanza tra due fessure di questo tipo deve essere dell'ordine di grandezza della lunghezza d'onda delle onde associate con le particelle. La Tab. 44.1 mostra le lunghezze d'onda associate con varie particelle in movimento, con la lunghezza d'onda ricavata utilizzando la [44.24]. Si può osservare che, anche se c'è un'onda associata col moto della bilia o della piccola sfera di lattice, non possiamo costruire una griglia o una coppia di fenditure abbastanza sottili da permetterci di percepire un qualsiasi effetto di interferenza. Il miglior modo di rispondere alla domanda di de Broglie è usare fasci di elettroni e neutroni lenti.

Tab. 44.1.

Particelle	Massa (kg)	Velocità (m/s)	Lunghezza d'onda (nm)
Bilia	5.0×10^{-3}	1.0×10^{-2}	1.3×10^{-20}
Sferetta di lattice	1.0×10^{-15}	3.0×10^{-4}	2.2×10^{-6}
Particella alfa (1 MeV)	6.7×10^{-27}	6.9×10^6	1.4×10^{-5}
Protone (1 MeV)	1.7×10^{-27}	1.4×10^7	2.8×10^{-5}
Elettrone (100 eV)	9.1×10^{-31}	5.9×10^6	1.2×10^{-1}
Neutrone (0.1 eV)	1.7×10^{-27}	4.3×10^3	0.9×10^{-1}

44.4. L'esperienza di Davisson-Germer

La prima conferma che le particelle hanno proprietà ondulatorie fu dovuta a una particolare attitudine alla scoperta unita alla capacità di attenzione. Nel 1919, C. J. Davisson studiò la riflessione degli elettroni su una lastra di nichel. Per caso il nichel fu surriscaldato, e quando si raffreddò di nuovo formò dei grandi cristalli. Davisson non notò il cambiamento nella piastra, ma notò dei massimi distinti nel fascio riflesso, il tipo di massimi che si riscontrano nella riflessione della luce su un reticolo.

Questa scoperta non voluta provocò un cambiamento nella direzione della ricerca di Davisson; egli e il suo assistente, Lester Germer, spostarono la loro attività sullo studio della riflessione di elettroni sui cristalli. I loro risultati confermarono che gli elettroni di quantità di moto p si comportano come onde di lunghezza d'onda data dalla relazione [44.23] di de Broglie.

Si può ritenere che gli atomi di un cristallo formino due serie di fenditure parallele, l'una perpendicolare all'altra. Quindi per capire i dettagli dell'esperienza di Davisson-Germer è necessario ampliare l'esame del modello di interferenza prodotto da una doppia fenditura (paragrafo 8.2 a pag.102). Per lungo tempo l'esperienza originale di Davisson-Germer e le sue ripetizioni effettuate da altri scienziati furono il modo più diretto per dimostrare la natura ondulatoria degli elettroni.

Negli anni più recenti le proprietà ondulatorie delle particelle sono state dimostrate anche con doppie fenditure costruite dall'uomo. Descriviamo qui due esperimenti: uno eseguito con i neutroni e uno con gli elettroni.

Lo schema generale dell'esperienza con i neutroni è riportato nella Fig. 44.8. Si noti la somiglianza tra questo schema e quello relativo all'esperienza con la luce della Fig. 44.6.

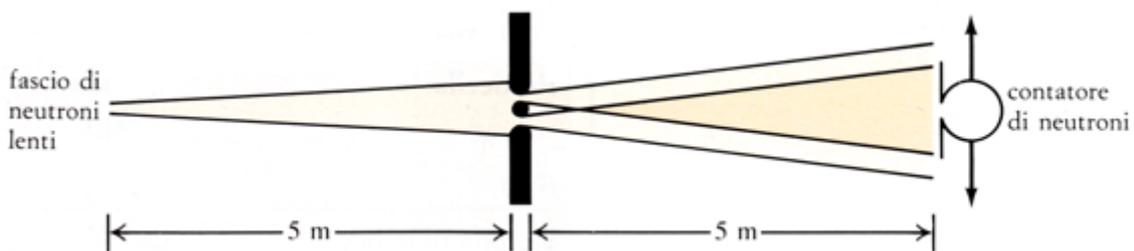


Fig. 44.8. Il dispositivo per l'esperienza con neutroni lenti.

Un fascio ben collimato di neutroni lenti passa attraverso una singola fenditura; quando il fascio raggiunge la doppia fenditura, si è diffratto a sufficienza per coprire ambedue le fenditure. Lontano, a un'estremità, un contatore di neutroni con una fenditura d'entrata assai stretta conta i neutroni.

I dettagli della costruzione della doppia fenditura si vedono nella Fig. 44.9, e un grafico del conteggio in funzione della posizione attraverso il fascio si vede nella Fig. 44.10. La linea continua rappresenta la previsione teorica basata sulla relazione [44.23] di de Broglie. È praticamente impossibile attendersi una concordanza maggiore tra la teoria e l'esperienza.

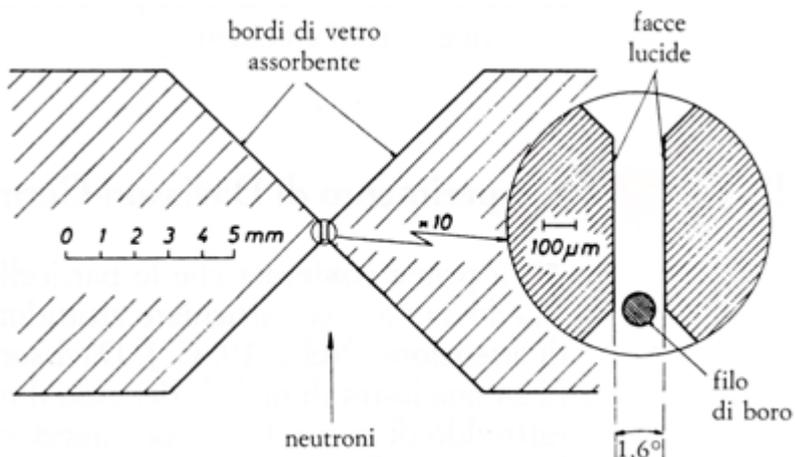


Fig. 44.9. Particolari della fenditura doppia. È importante notare la scala sull'ingrandimento a destra. Il boro è un efficace assorbitore di neutroni. (Da: A. Zeilinger, R. Ggiler, C.G. Shull, W. Treimer, W. Mampe, «Review of Modern Physics», vol. 60, 1988.)

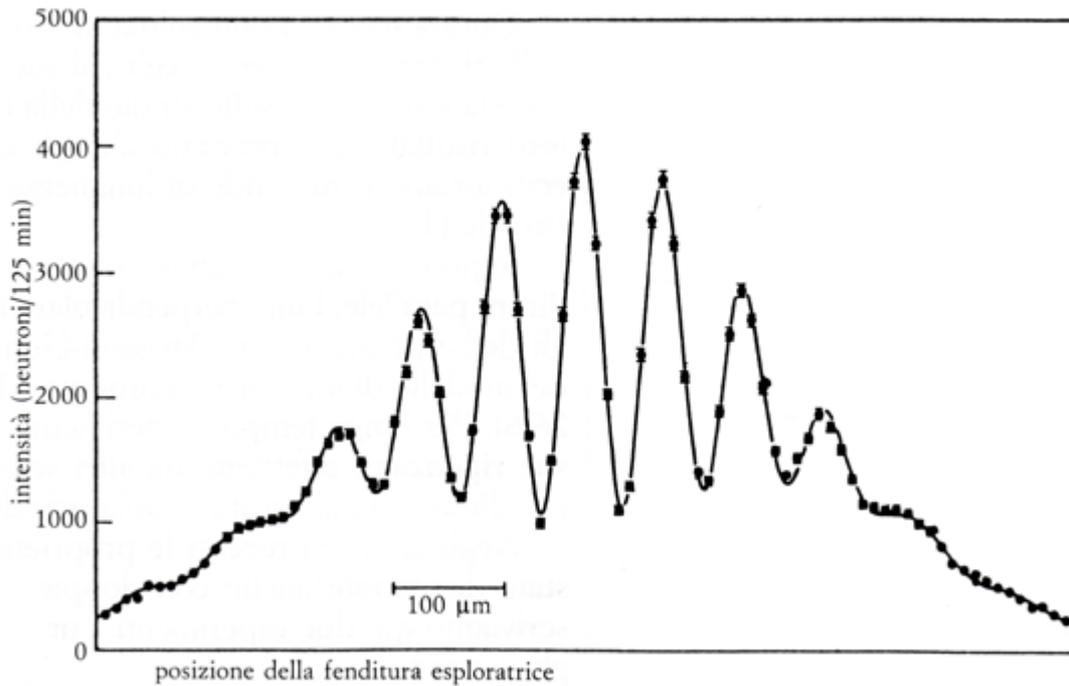


Fig. 44.10. La frequenza di conteggio in funzione della posizione del contatore rappresenta la figura di interferenza caratteristica. (Da: A. Zeilinger, R. Galikr, C.G. Shull, W. Treimer, W. Mampe, «Review of Modern Physics», vol. 60, 1988.)

L'esperimento con gli elettroni è tecnicamente più complicato; costruire due fenditure (Fig. 44.11) distanti $2 \mu\text{m}$ e larghe $0.5 \mu\text{m}$ è molto difficile. Dopo essere passati attraverso la doppia fenditura gli elettroni vengono deviati elettrostaticamente per ingrandire la figura di diffrazione. La figura di interferenza originata dagli elettroni con un'energia cinetica di $4 \times 10^4 \text{ eV}$ che passano attraverso due fenditure è riportata nella Fig. 44.12.



Fig. 44.11. La fenditura doppia fotografata con un microscopio elettronico. (Da: C. Jönsson, «Zeitschrift für Physik», vol. 161, 1961)

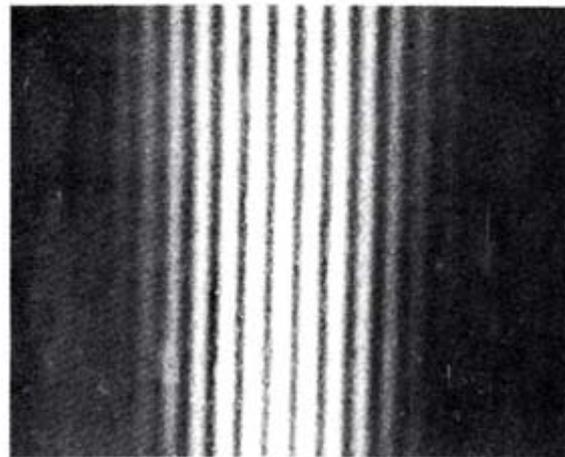


Fig. 44.12. La figura di interferenza di elettroni prodotta dalle due fenditure nella Fig. 44.11, molto ingrandita. (Da: C. Jönsson, «Zeitschrift für Physik», vol. 161, 1961)

Nel 1976 P. G. Merli, G. F. Missiroli e G. Pozzi, utilizzando un microscopio elettronico con un biprisma elettronico di Möllenstedt e Düker e un intensificatore di immagini, osservarono direttamente il processo statistico della formazione delle frange di interferenza a partire dai flash dovuti ai singoli elettroni alle basse intensità del fascio elettronico incidente (si veda il sito *l'esperimento più bello della fisica* all'indirizzo <http://l-esperimento-piu-bello-della-fisica.bo.imm.cnr.it/index.html>).

Quesiti

- 44.7.** Nella Fig. 44.9 le distanze tra le facce levigate e il filo di boro sono $21.9 \mu\text{m}$ e $22.5 \mu\text{m}$. Il diametro del filo di boro è di $104.1 \mu\text{m}$.
- Che valore useresti per la distanza d tra le fenditure per calcolare la lunghezza d'onda dei neutroni?
 - In base alla scala indicata sopra l'asse della posizione della fenditura esploratrice della Fig. 44.10, qual è la distanza tra i minimi adiacenti del modello di interferenza?
 - Qual è la lunghezza d'onda dei neutroni?
 - Qual è la velocità dei neutroni?
- 44.8.** Si supponga che un fascio di elettroni di lunghezza d'onda 0.1 nm passi attraverso la doppia fenditura che si vede nella Fig. 44.11 a un'estremità di un tubo a vuoto della lunghezza di 1 km . Quale sarà la distanza tra le linee nodali all'altra estremità del tubo?
- 44.9.** Quali sono la quantità di moto e l'energia cinetica degli elettroni nel quesito 44.8?

44.5. Fotoni e meccanica quantistica

Le varie esperienze or ora descritte dimostrarono in modo decisivo la natura duale della radiazione elettromagnetica e della materia: un elettrone può propagarsi come un'onda e la luce può interagire come un corpuscolo materiale (*dualismo onda-corpuscolo*).

Si è già visto come si possono descrivere gli aspetti classici degli elettroni e della radiazione elettromagnetica, ma come si possono descrivere i «corpuscoli luminosi» e le «onde elettroniche»?

Si è parlato spesso della *frequenza* di un'onda elettromagnetica, ma questa terminologia è impropria poiché, in verità, non esiste la frequenza di un'onda elettromagnetica reale; cioè, tale radiazione non possiede mai un'unica frequenza definita con grande precisione. Per definire la frequenza di un'onda, questa deve avere proprietà assolutamente uniformi in tutto lo spazio. Perciò, un'onda di frequenza assolutamente pura (Fig. 44.13) deve avere un'estensione infinita. Ma tutti gli oscillatori elettromagnetici, siano essi antenne radio o atomi, oscillano solo per intervalli di tempo finiti. Perciò, la radiazione ha un'estensione necessariamente finita e non può avere una frequenza unica e precisa. La radiazione reale equivale sempre a una combinazione (o *sovrapposizione*) di oscillazioni aventi varie frequenze. Se queste frequenze giacciono in un intorno di una frequenza centrale, l'effetto è quello di produrre l'interferenza *costruttiva* in un'unica regione dello spazio e l'interferenza *distruttiva* fuori di questa regione. L'aspetto di tale sovrapposizione di onde è schematizzato nella Fig. 44.14. Questo insieme localizzato di oscillazioni si chiama *pacchetto d'onde*. Nel caso della radiazione elettromagnetica, il pacchetto (cioè, un *fotone*) si propaga come un tutto unico con la velocità della luce.

Il campo di frequenze dei fotoni appartenenti al visibile è piuttosto piccolo. Per esempio, si consideri la luce gialla di frequenza nominale $5 \times 10^{14} \text{ Hz}$. Nell'emissione di tale luce da un atomo, il campo di frequenze è soltanto circa 2 parti su 10^6 , cioè $\Delta\nu/\nu = 2 \times 10^{-6}$. Il corrispondente campo di lunghezze d'onda è solo 0.001 nm ; cioè, la lunghezza d'onda media è 600 nm con una dispersione della lunghezza d'onda da 599.999 nm a 600.001 nm . Nessuna riga spettrale è assolutamente netta: essa ha sempre una piccola larghezza naturale o propria.



Fig. 44.13. Un'onda che ha una frequenza pura o precisa deve essere identica dappertutto, cioè deve avere estensione infinita.

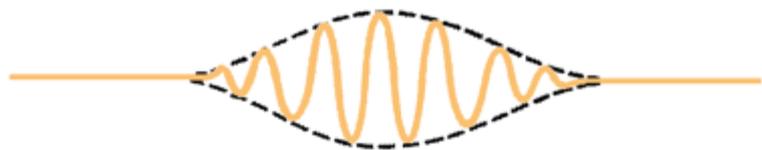


Fig. 44.14. Un pacchetto d'onde (o fotone) è localizzato nello spazio poiché la sovrapposizione di onde di varie frequenze produce interferenza costruttiva in una regione e interferenza distruttiva dappertutto fuori di questa regione. I fotoni reali contengono $10^5 \div 10^6$ oscillazioni, non le poche rappresentate qui.

Nella Fig. 44.14 sono rappresentate solo 7 oscillazioni all'interno del pacchetto d'onde; nel caso di un tipico fotone di luce, come quello ora descritto, il pacchetto sarebbe costituito da circa 6×10^5 oscillazioni. Questo fotone, che contiene un numero così grande di oscillazioni, conserva molte delle sue caratteristiche ondulatorie, ma continua a essere un'unità discreta e perciò interagisce singolarmente con gli elettroni, per esempio nell'effetto fotoelettronico.

44.6. Il principio di indeterminazione di Heisenberg

La conclusione che i fotoni non sono unici, così come il loro «rifiuto» di seguire una traiettoria precisa, sono inesplicabili. Le particelle, che fanno parte della materia ordinaria, passando attraverso una doppia fenditura producono una figura di interferenza. Ogni tentativo da parte nostra di scoprire attraverso quale fenditura esse passino distrugge la figura di interferenza, così avviene con la luce. Questa conclusione può essere formulata in un modo più generale.

Consideriamo un fascio di elettroni di quantità di moto \mathbf{p} che si muove parallelamente all'asse y di un sistema di coordinate xy (Fig. 44.15).

Il fascio può anche essere abbastanza ampio. Supponiamo che si voglia avere una determinazione più precisa della coordinata x di alcuni elettroni. Possiamo ottenere ciò ponendo una stretta fenditura sul percorso degli elettroni. Se la fenditura ha una larghezza l , allora per gli elettroni che passano attraverso di essa abbiamo delimitato l'indeterminazione Δx della loro coordinata x alla larghezza della fenditura:

$$[44.25] \quad \Delta x = l$$

Passando attraverso la fenditura, gli elettroni vengono diffratti (fare riferimento al paragrafo 8.6 a pag. 109 relativo alla diffrazione della luce). Questo significa che molto probabilmente si muoveranno in ogni direzione entro un angolo θ dato da:

$$[44.26] \quad \sin \theta = \frac{\lambda}{l}.$$

Poiché una figura di diffrazione ha massimi secondari da entrambe le parti del massimo centrale, non possiamo neppure essere sicuri che un elettrone non possa muoversi al di fuori di un angolo maggiore di θ . La possibilità di muoversi entro un angolo imprecisabile rispetto alla direzione originaria introduce un'indeterminazione nella componente x della quantità di moto (Fig. 44.16):

$$[44.27] \quad \Delta p_x \approx p \sin \theta$$

Ricavando $\sin \theta$ dalla relazione [44.26] e λ dalla relazione [44.24] e sostituendo l con Δx , la relazione [44.27] diventa

$$[44.28] \quad \Delta x \cdot \Delta p_x \approx h$$

La relazione [44.28] è conosciuta come il *principio di indeterminazione di Heisenberg*. Il principio di indeterminazione non ha relazione con indeterminazioni tecniche nelle misure causate dai limiti degli

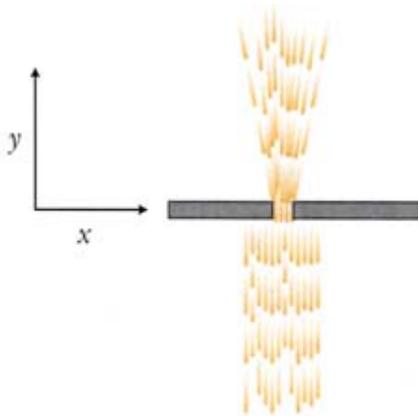


Fig. 44.15. Un disegno schematico del passaggio di elettroni attraverso una fenditura.

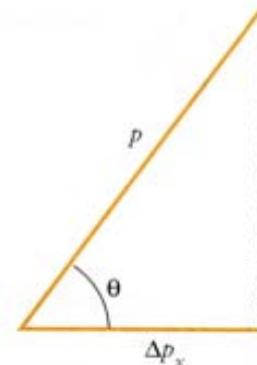


Fig. 44.16. La relazione tra Δp_x e la direzione della prima linea nodale della figura di diffrazione.

strumenti usati. Senza dubbio la relazione [44.28] non pone alcun limite né a Δx né a Δp_x ; essa pone un limite al loro prodotto e ciò non può essere eliminato da nessun ingegnoso esperimento.

44.6. Un'altra forma del principio di indeterminazione

Si supponga di volere misurare la frequenza di un fotone contando il numero di cicli che si osservano in un intervallo di tempo Δt . Il fotone, non avendo un'estensione infinita, non ha una frequenza pura, bensì una miscela di frequenze (si veda la Fig. 44.14). Di conseguenza, non si riuscirà mai a contare esattamente il numero di oscillazioni che avvengono in ciascun secondo. Si può ragionevolmente supporre che il conteggio sarà (nel migliore dei casi) incerto (o indeterminato) di circa un ciclo (oscillazione). Cioè, l'incertezza (o indeterminazione) nella misura della frequenza è

$$[44.29] \quad \Delta \nu = \frac{1 \text{ ciclo}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}$$

La corrispondente incertezza (o indeterminazione) nell'energia del fotone sarà h volte $\Delta \nu$:

$$[44.30] \quad \Delta E = h \cdot \Delta \nu \approx \frac{h}{\Delta t}$$

e quindi

$$[44.31] \quad \Delta E \cdot \Delta t \approx h.$$

Questo enunciato del principio di indeterminazione ha esattamente lo stesso contenuto dell'enunciato precedente, $\Delta x \cdot \Delta p_x \approx h$. Nel 1928, Niels Bohr riassunse le conclusioni che erano state raggiunte riguardo all'indeterminismo nella teoria quantistica, dicendo che *se un'esperienza permette di osservare un aspetto di un fenomeno fisico, essa impedisce simultaneamente di osservare un aspetto complementare del fenomeno*. Questo enunciato è noto come *principio di complementarità* di Bohr. Gli aspetti complementari a cui si applica il principio di complementarità possono essere la posizione e la quantità di moto di una particella, il carattere ondulatorio e il carattere corpuscolare della materia o della radiazione, o l'energia e l'intervallo di tempo per un evento. L'indeterminazione quantistica enunciata nel principio di indeterminazione di Heisenberg è inclusa nel più generale principio di complementarità.

Quesiti

-
- 44.10.** La posizione di un elettrone libero viene determinata con un metodo ottico con un'incertezza non superiore a 10^{-6} m.
 (a) Qual è l'incertezza nella sua velocità?
 (b) Dopo 10 s quale sarà l'incertezza sulla sua posizione?
- 44.11.** Un elettrone viene localizzato nella direzione x a meno di 1 mm. Con quale precisione si può conoscere la sua velocità nella direzione x ?
- 44.12.** Nell'emettere un fotone, un atomo emette radiazione per circa 10^{-9} s.
 (a) Qual è l'incertezza (o indeterminazione) nell'energia del fotone?
 (b) Se il fotone ha una lunghezza d'onda di 600 nm, quanto vale l'incertezza *relativa* dell'energia?
- 44.13.** La *posizione angolare* e il *momento della quantità di moto* (o *momento angolare*) sono grandezze complementari nel senso del principio di complementarità di Bohr? Se sono tali, si enunci un «principio di indeterminazione» per queste grandezze.
-

44.7. Natura e pregiudizi

Le lunghezze d'onda di de Broglie sono molto piccole rispetto alle dimensioni lineari; non dobbiamo preoccuparci delle proprietà ondulatorie degli elettroni, ma sulla scala atomica le proprietà ondulatorie hanno un ruolo dominante nel moto di tutte le particelle.

La scoperta dell'esistenza della costante di Planck fuse due mondi che prima sembravano separati: le particelle e le onde. Per esprimere le conseguenze di questa fusione è stato sviluppato un apparato matematico elaborato: la fisica quantistica.

Nella vita quotidiana, a differenza di quanto avviene nel mondo quantistico, qualcosa può essere o una particella, come un granello di sabbia, o un'onda, come un'increspatura su uno stagno. Poiché il comportamento degli enti appartenenti a queste due categorie sembra così contraddittorio, i fisici non hanno esitato a chiedersi: «La luce è costituita da particelle oppure da onde?». Questa domanda implica l'aspettativa che la natura debba conformarsi alle idee preconcepite dell'uomo e oggi sappiamo che la natura non lo fa.

L'osservazione espressa qui non si riferisce alla storia antica. Alcune profonde conseguenze della meccanica quantistica continuano a turbare molte persone. Le previsioni in questo settore e le loro verifiche sperimentali fanno parte delle ricerche in corso nella fisica fondamentale. Per quanto strani possano apparire questi risultati, se espressi nel linguaggio quotidiano, la fisica quantistica continua a essere confermata.

44.8. Il principio di indeterminazione distrugge la teoria quantistica?

Che validità ha una teoria incapace di rispondere a una domanda così semplice come «quale fenditura ha attraversato l'elettrone»? In realtà, non si ha alcuna ragione di biasimare la teoria quantistica per la sua incapacità di rispondere a una domanda siffatta, poiché una teoria può prendere in considerazione solo domande la cui risposta può essere verificata mediante esperienze. In una teoria fisica non c'è posto per una grandezza che non può essere definita mediante una misurazione. Poiché nessuna misurazione può decidere quale fenditura è stata attraversata da un elettrone in un'esperienza d'interferenza con una fenditura doppia, non ci si può aspettare che alcuna teoria fornisca la risposta. Una teoria non può essere migliore delle misurazioni a cui si applica. L'utilità della teoria quantistica non è affatto inficiata dal principio di indeterminazione: invero, il principio di indeterminazione è la pietra angolare su cui è costruita la teoria quantistica.

44.9. Principio di indeterminazione e determinismo

Dopo lo sviluppo della teoria newtoniana, si creò una filosofia deterministica della natura. Secondo questa filosofia, se, in un certo istante, si potessero determinare le posizioni e le velocità di tutte le particelle in un sistema chiuso e se si conoscessero le forze d'interazione fra le particelle, si potrebbe calcolare il comportamento futuro completo del sistema, cioè il futuro del sistema sarebbe predeterminato. Naturalmente, in pratica, tale calcolo è impossibile. Se la posizione di una sola particella del sistema fosse imprecisa sia pure minimamente, a causa delle interazioni di questa particella con le altre particelle l'imprecisione si propagherebbe e si amplierebbe in misura tale che (entro un tempo lungo abbastanza) il comportamento del sistema differirebbe sostanzialmente da quello previsto dalla teoria newtoniana. Ma oltre a questa difficoltà pratica, c'è la limitazione fondamentale alla prevedibilità imposta dalla teoria quantistica e dal principio di indeterminazione.

La teoria quantistica non dimostra che la filosofia del determinismo è errata. Essa dice solo che nessuna osservazione potrà mai dimostrare che la concezione deterministica è corretta. I filosofi devono rivolgersi altrove per trovare una dimostrazione o una confutazione del determinismo. Il fisico può accettare solo le limitazioni imposte alle osservazioni e alle misurazioni dalla teoria quantistica (salvo che e finché non sia dimostrato che è errata). Si deve lavorare con la probabilità invece che con la certezza.

Problemi di fine capitolo

- 44.14.** Una comune torcia elettrica ha una lampadina che assorbe 0.25 A a 3.0 V e concentra la luce emessa in un fascio la cui sezione ha un'area di circa 10 cm^2 .
Si supponga che l'1% della potenza elettrica dissipata dalla lampadina si converta in luce di lunghezza d'onda $5.8 \times 10^2 \text{ nm}$.
- (a) Quanti fotoni ci sono in ogni metro lungo l'asse del fascio?
(b) Quanti fotoni al secondo arrivano su ogni centimetro quadrato di una superficie illuminata da questa torcia?
- 44.15.** Una tipica stazione di radiodiffusione FM (*frequency modulation*, modulazione di frequenza) irraggia radiazione elettromagnetica con una lunghezza d'onda di 3 m. Calcolare:
- (a) l'energia di un fotone di questa radiazione;
(b) il numero di fotoni emessi al secondo se la potenza irraggiata è 10 kW.
(c) il numero approssimativo di fotoni ricevuti da un radiorecettore durante una vibrazione della lettera «s» nell'uscita audio del ricevitore se questo dista 100 km dalla stazione. Fare le seguenti ipotesi semplificatrici:
- (i) la radiazione si distribuisce uniformemente in tutte le direzioni lungo raggi uscenti dalla sorgente in modo che il flusso di energia ubbidisca a una legge dell'inverso del quadrato della distanza (ciò non è vero per una comune antenna);
(ii) l'antenna ricevente raccoglie la radiazione da una superficie di area 1 m^2 perpendicolare alla direzione di propagazione delle onde;
(iii) il suono della lettera «s» implica oscillazioni dell'aria a una frequenza di circa 4000 Hz.
(d) Si noteranno tutti i singoli fotoni nel ricevere la lettera «s» o se ne perderà qualcuno?
- 44.16.** Qual è la lunghezza d'onda di un elettrone di 10 eV? Un fotone avente la stessa lunghezza d'onda che energia avrebbe?
- 44.17.** Qual è la lunghezza d'onda di una persona che corre con una velocità di 10 m/s? Qual è il significato di tale lunghezza d'onda? La persona potrebbe essere «diffratta»?
- 44.18.** Dimostrare che a un elettrone non relativistico, accelerato da fermo mediante una differenza di potenziale ΔV misurata in volt, si può associare un'onda di de Broglie la cui lunghezza d'onda λ può essere espressa dalla relazione:

$$\lambda = \sqrt{\frac{1.504 \text{ V}}{\Delta V}} \text{ nm}.$$

Calcolare la lunghezza d'onda nel caso di $\Delta V = 50.0 \text{ V}$.

- 44.19.** Un fotone urta un elettrone libero che ha una velocità iniziale che può essere considerata trascurabile. Dopo l'urto si rileva un fotone diffuso che ha un'energia pari a 101 keV e che presenta un angolo di deviazione dovuto all'effetto Compton di $30^\circ 00'$. Ricavare l'energia del fotone incidente e l'energia cinetica dell'elettrone di rimbalzo sempre espresse in eV.
-