

“Il libro della natura è scritto in lingua matematica”: le scienze della natura e l'uso della matematica

F. Sacchetti

Dipartimento di Fisica e Geologia

Università degli Studi di Perugia

Questa NON è una presentazione multimediale ma solo una raccolta di informazioni e di osservazioni varie

La nascita della scienza moderna viene attribuita a Galileo Galilei ma la *matematicizzazione* della scienza ha radici antiche e Galileo ne fa un uso nuovo

# L'osservazione della natura e la conoscenza del mondo



*Raffaello, Scuola di Atene, 1508-1511, Stanza della Segnatura, Palazzi Vaticani, Roma*

## Lezione zero, I

Un paese che distrugge la sua scuola non lo fa mai solo per soldi,  
perché le risorse mancano o i costi sono eccessivi.

Un paese che demolisce l'istruzione è già governato da quelli che  
dalla diffusione del sapere hanno solo da perdere.

Italo Calvino (da La Repubblica del 15 marzo 1980)

## Lezione zero, II

La conoscenza è sempre meglio  
dell'ignoranza

E. Fermi

La Storia è una severa maestra  
e gli Uomini sono pessimi studenti: non imparano

- 1) L'osservazione della Natura inizia con l'Uomo sulla Terra
- 2) La matematica nasce con le prime osservazioni della Natura ma ha avuto fin dall'inizio una valenza anche pratica ed economica, oltre che filosofica
- 3) La prima scienza di osservazione della Natura è probabilmente la **Geometria**, ora una branca della matematica distinta dalle scienze della Natura
- 4) La matematica, come scienza delle quantità, nasce con l'Aritmetica (la matematica dei numeri naturali)
- 5) Alcune osservazioni sul mondo naturale nell'antichità sono spesso legate ad aspetti della filosofia corrente

La matematica si evolve con lo sviluppo del pensiero umano insieme alla filosofia.

La matematica si intreccia con la filosofia per secoli.

Il pensiero matematico incontra spesso difficoltà di base, paradossi o antinomie, cioè contraddizioni di varia natura.

Con l'avanzare delle conoscenze alcune difficoltà vengono superate ma altre più basilari si presentano.

Esempio: il paradosso di Zenone sul moto (Achille e la tartaruga)

Come può il corridore più veloce del mondo superare una lenta tartaruga?

In un periodo di tempo Achille arriva a metà strada, nel successivo periodo Achille supera metà della distanza rimasta e così via per le infinite volte che sono necessarie a raggiungere la tartaruga.

Ci vogliono **infiniti intervalli di tempo** solamente per raggiungere la tartaruga! **IL MOTO NON ESISTE!**

I pitagorici consideravano fondamentali i rapporti fra i numeri (interi. NOTA, i numeri razionali sono tutti e soli i rapporti fra i numeri interi, essi sono **numerabili**)

Le loro capacità aritmetiche gli avevano consentito di avere un notevole peso politico nella Magna Grecia per un lungo periodo

La scoperta del primo numero irrazionale (i numeri irrazionali non sono **numerabili**), la radice quadrata di 2, ha avuto un effetto notevole sulla loro filosofia della Natura: il mondo fisico non sembrava più legato a rapporti stabiliti di numeri interi

Queste visioni sono da considerare scorrette in quanto non direttamente associate o associabili a osservazioni



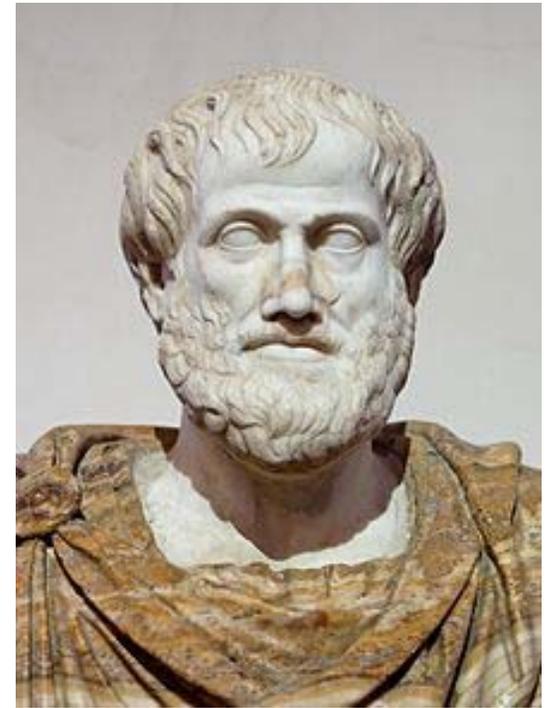
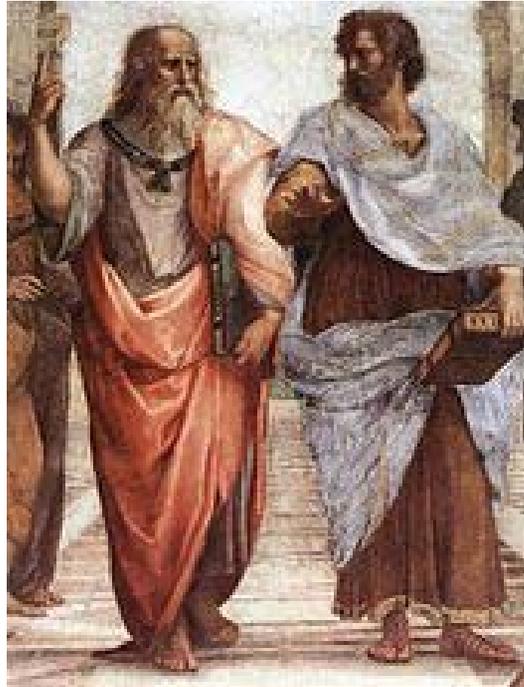
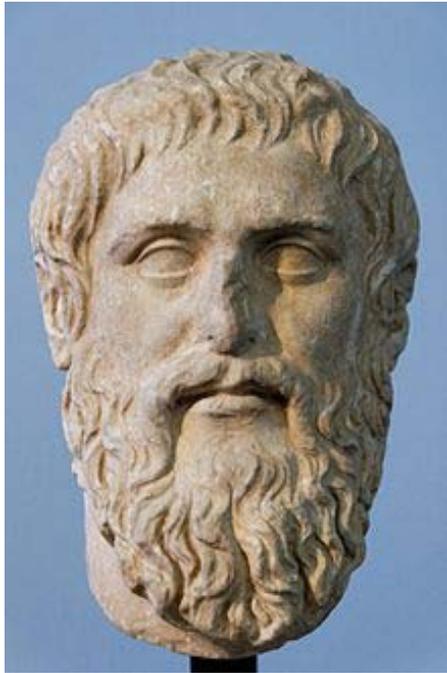
I pitagorici avevano una grande influenza nella Magna Grecia. La loro decadenza non ha ragioni ovvie ma si potrebbe anche correlare con dei limiti tecnologici dovuti al rallentamento dei loro progressi nelle conoscenze matematiche

Nel passato la filosofia si afferma come metodo di descrizione del mondo naturale

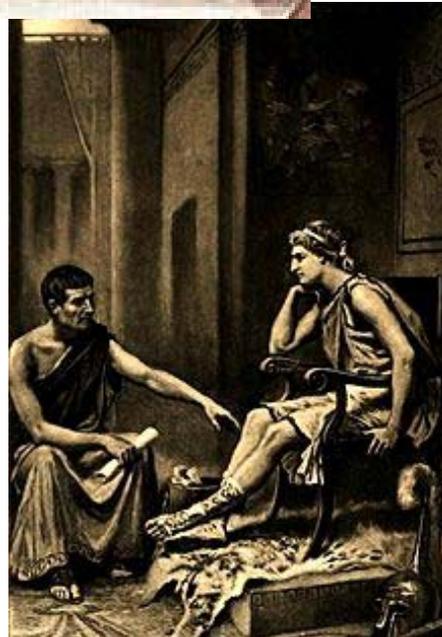
I pensatori inquadrano alcune osservazioni in un costrutto che vede la Natura come una **struttura** perfetta

Da Platone (Atene, 428 /427 A.C. - Atene, 348/347 A.C.) a Tolomeo (D.C. 90 - D.C. 168, circa) l'universo è composto di figure perfette derivate da assunzioni che si cerca di far discendere da considerazioni **logiche** (la logica è spesso basilare ma vari paradossi sono già noti)

Un primo osservatore attento del mondo è Aristotele (Stagira, 384 A.C. o 383 a.C - Calcide, 322 a.C) che forse è tra i primi a voler effettuare osservazioni e classificazioni prima di dedurre delle regole



Platone e Aristotele,  
forse coloro a cui si  
deve la nascita del  
pensiero moderno



Aristotele e  
Alessandro

La Geometria progredisce per mezzo di osservazioni parallelamente ad uno sviluppo formale moderno

Eratostene determina il raggio della Terra con un metodo ingegnoso che usa regole geometriche e osservazioni sperimentali

Il processo di dimostrazione (teoremi) a partire da alcuni **postulati** viene efficacemente introdotto

I postulati sono considerati **fatti incontrovertibili** ed evidenti nel mondo naturale (ma ovviamente non c'è procedura per poterlo stabilire)

Euclide(367 A.C. circa - 283 A.C.) introduce la prima teoria formale di quella parte della Geometria oggi detta **Euclidea**. Questa è una prima visione assiomatica (concetto moderno) della Natura

Quale sia la relazione fra geometria euclidea e Natura non è deducibile e non ci sono ovvie motivazioni a priori, la relazione fra geometria e Natura rimane una questione basilare



# GEOMETRIA EUCLIDEA

- Si può prolungare un segmento oltre i due punti indefinitamente
  - Dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio
  - Tutti gli angoli retti sono congruenti tra loro
  - Se una retta che taglia altre due rette determina dallo stesso lato angoli interni minori di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove i due angoli sono minori di due retti.
- (Per un punto passa una ed una sola parallela ad una retta data)



La descrizione iniziale della geometria non è ancora considerata completa e i postulati vengono riformulati da Euclide stesso e poi da pensatori successivi

- Due punti distinti dello spazio individuano una retta.
- Ogni coppia di punti di una retta individua tale retta.
- Tre punti non allineati dello spazio individuano un piano.
- Qualsiasi terna di punti non allineati di un piano individua tale piano.
- Se due punti di una retta giacciono su un piano tutti i punti della retta giacciono su quel piano.
- Se due piani hanno un punto in comune avranno almeno un secondo punto in comune.
- Ogni retta contiene almeno due punti, ogni piano contiene almeno tre punti non allineati, ed esistono almeno quattro punti non complanari.
- Esistono almeno quattro punti che non giacciono sullo stesso piano.

Questa impostazione è molto moderna. Il significato dei postulati è però molto diverso dalla visione moderna in cui essi sono sostituiti da assiomi.

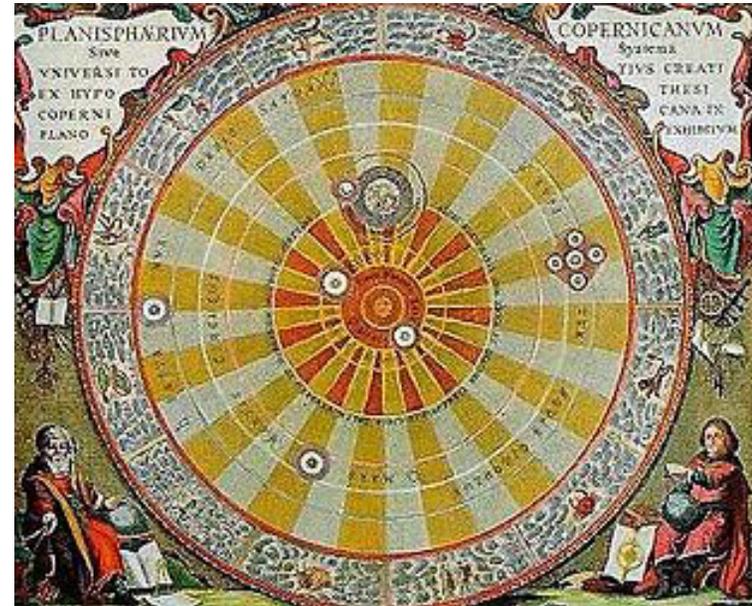
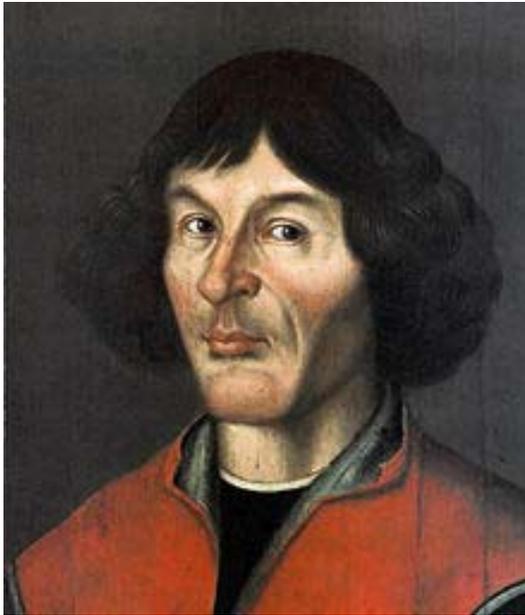
Una teoria matematica moderna è fatta di definizioni formali, assiomi (che non necessitano giustificazione non perché veri ma perché questi sono assunti come premesse) e teoremi dedotti con passaggi "logici".

La logica è assunta a due valori, cioè

Se  $A$  è vera ***non***  $A$  è falsa e viceversa

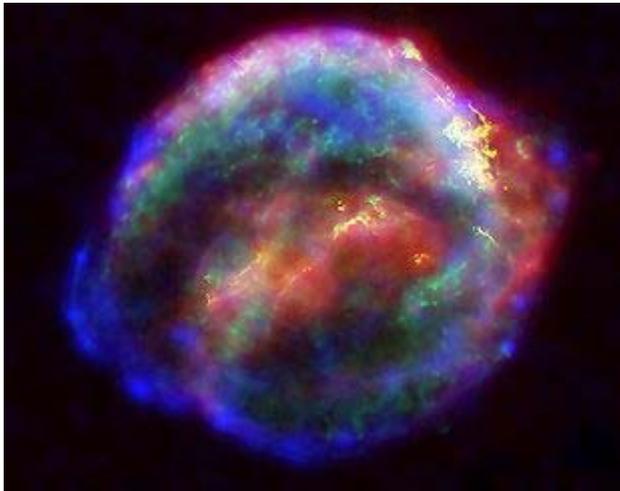
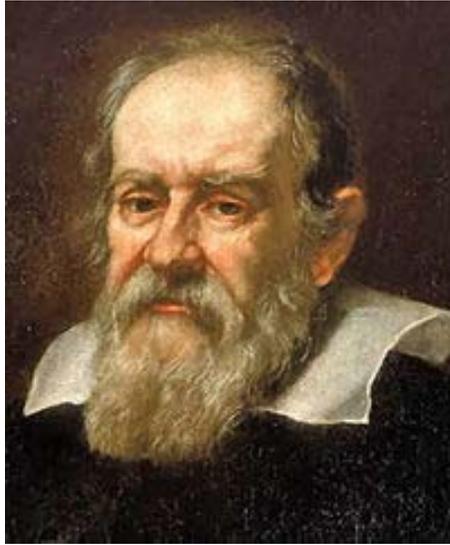
Questo approccio è stato considerato a lungo al di sopra di ogni problema. Rimane solo da stabilire la "coerenza" degli assiomi.

Mikolaj Kopernik (in italiano Niccolò Copernico; in latino: Nicolaus Copernicus; Toruń, 19 febbraio 1473 - Frombork, 24 maggio 1543)



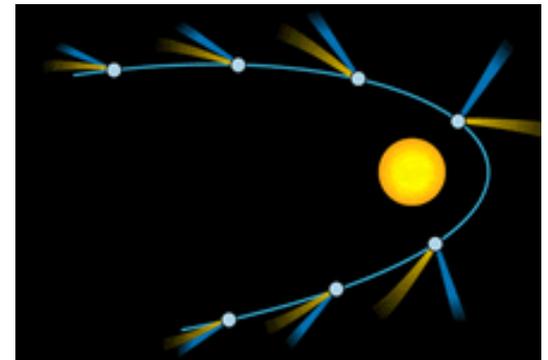
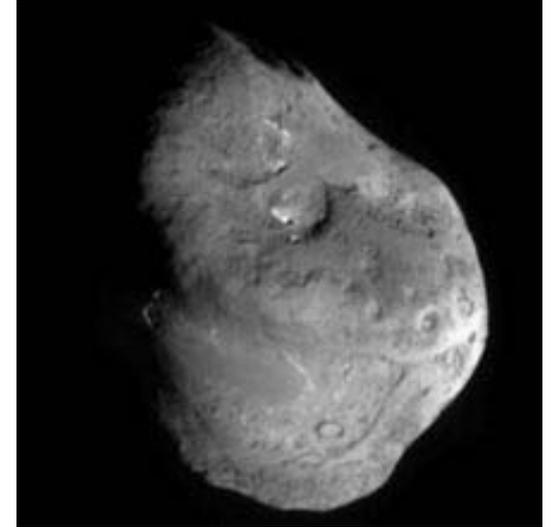
Copernico introduce una nuova visione del cosmo, nei cieli il Sole occupa una posizione centrale e i pianeti girano intorno. È una visione che semplifica il cosmo tolemaico.

Galileo Galilei (Pisa, 15 febbraio 1564 - Arcetri, 8 gennaio 1642)

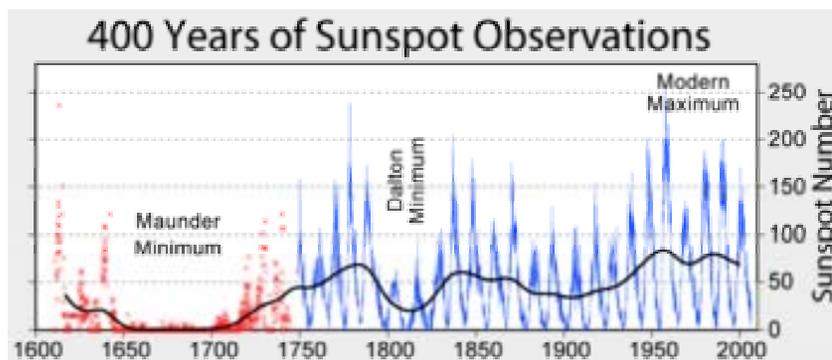
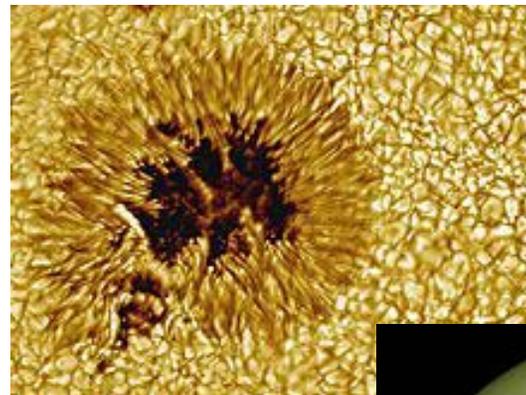


Galileo con le sue osservazioni introduce il metodo moderno di studio della Natura: in linea con Aristotele ne estende il pensiero, osservare e inquadrare in regole matematiche

Galileo introduce una visione della Natura e del cosmo basata su osservazioni e considerazioni sulle osservazioni utilizzando metodi quantitativi.



Galileo osserva per primo le macchie solari, un fenomeno molto importante



Nella pratica moderna ci si rende conto che c'è una fondamentale differenza fra pensiero matematica e esperienza nel mondo naturale:

**OGNI OSSERVAZIONE SPERIMENTALE CONTIENE DELLE INCERTEZZE CHE SONO INTRINSECHE**

Queste incertezze sono dette **ERRORI SPERIMENTALI**

Questa osservazione ci indica che non ci può essere un diretto legame fra una descrizione matematica e un'osservazione: la descrizione matematica produce risultati descrivibili con numeri reali (o complessi o altri quantificatori) mentre i risultati delle osservazioni hanno incertezze legate al procedimento e alle unità di misura.

La geometria si evolve e viene messa in relazione con la teoria dei numeri (algebra).

Cartesio (René Descartes, 1596-1650) introduce la geometria cartesiana in cui un punto del piano viene messo in relazione con coppie di numeri reali. Cartesio è coevo di Galileo.

Dal punto di vista tecnico questo è un passo avanti notevole ma la relazione fra Natura e geometria rimane indefinito.



Il metodo di Cartesio introduce un nuovo metodo di indagine, trasferendo una branca della matematica (la geometria) su un'altra branca (l'algebra) apparentemente molto distanti. La geometria è sempre considerata vicina (quasi la stessa cosa) alle scienze della Natura e quindi ha un ruolo importante per esse.

La matematica si evolve in modo impetuoso nei tre secoli successivi e sembra riuscire a descrivere tutto il mondo naturale e oltre, i suoi successi sono sconvolgenti.

Nel XIX secolo cade la geometria euclidea, i suoi postulati non sembrano avere la validità basilare. Lobachevski e Riemann introducono le geometrie non euclidee. Poincaré fa ipotesi sulla relazione fra le geometrie non euclidee e il cosmo.

# Isaac Newton (1642-1727)

Risolve il paradosso di Zenone, infiniti tempi si possono sommare, si introduce il concetto matematico di infinitesimo



## Lex I

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

## Lex II

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

## Lex III

Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones is se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

Le leggi (matematiche) introdotte da Newton che descrivono molto bene le osservazioni sui moti (ad esempio dei pianeti) sono state raffinate nei secoli successivi. Prima da Lagrange (Giuseppe Luigi Lagrangia o Lagrange, Torino, 25 gennaio 1736 - Parigi, 10 aprile 1813). Lagrange sfrutta i metodi dell'analisi matematica di cui Newton era stato l'inventore ed ottiene, in collaborazione con Eulero un'equazione assolutamente generale che può trattare tutti i tipi di moto.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0$$

Questa equazione si usa anche in problemi specifici della matematica, essa affronta il calcolo delle variazioni

Altri si sono impegnati in ulteriori avanzamenti.

Sir William Rowan Hamilton (Dublino, 4 agosto 1805 -  
Dublino, 2 settembre 1865)

Carl Gustav Jacob Jacobi (Potsdam, 10 dicembre 1804 -  
Berlino, 18 febbraio 1851)

A loro si devono le equazioni di Hamilton-Jacobi

$$\dot{p}_h = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_h} \qquad \dot{q}_h = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_h}$$

Tuttavia il mondo **NON** deve essere analizzato impiegando degli assunti che *sembrano ragionevoli*, questo ci porta spesso ad errori. Un esempio complesso proviene dall'aritmetica che Giuseppe Peano (1899) per primo basa su 5 assiomi.

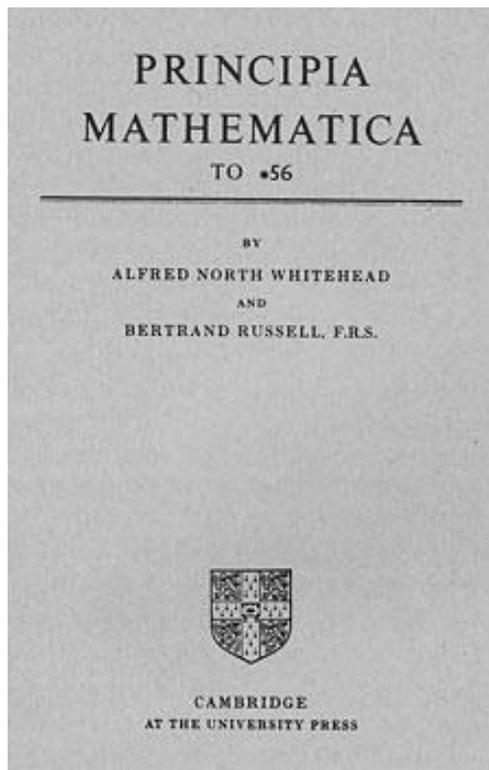
- 1) Lo zero è un numero
- 2) Il successore immediato di un numero è un numero
- 3) Lo zero non è successore immediato di alcun numero
- 4) Due numeri qualsiasi hanno un diverso successore immediato
- 5) Ogni proprietà di cui goda lo zero e il successore immediato di ogni numero il quale goda di detta proprietà, è una proprietà di tutti i numeri (induzione)

David Hilbert (Königsberg, 23 gennaio 1862 - Gottinga, 14 febbraio 1943), visti i successi del metodo assiomatico propone un programma per la matematica del XX secolo basata tutta sull'assiomatizzazione di una sola branca da mettere poi in relazione con tutte le altre.



Hilbert è uno dei massimi matematici di tutti i tempi, purtroppo il suo approccio fu destinato ad un fallimento epocale. Pochi anni dopo la matematica dovrà ripensare tutta la sua visione che risulta molto più limitata di quanto sperato. Al congresso internazionale del 1900 Hilbert presentò i 23 problemi del XX secolo, alcuni sono ancora irrisolti...

L'approccio assiomatico parte dal presupposto che gli assiomi siano fra di loro coerenti, quindi è necessario un metodo per stabilire questa coerenza. L'aritmetica e tutte le teorie matematiche basate sul procedimento di deduzione logica si dimostrano deboli.



Bertrand Arthur William Russell, III conte Russell di Bedford (Trellech, 18 maggio 1872 - Penrhyndeudraeth, 2 febbraio 1970)



Nel 1931 Kurt Gödel scrive una memoria *Sulle proposizioni formalmente indecidibili dei Principia Mathematica*. In altri termini non esistono sistemi assiomatici non banali per i quali si possa dimostrare che gli assiomi sono coerenti e per i quali non esistano teoremi veri non dimostrabili a partire dagli assiomi.

La differenza fra la fisica e la matematica è che ogni teoria fisica, *alla fine*, si deve confrontare con l'osservazione e la natura delle cose non conosce la matematica.

Tuttavia l'applicazione di metodi matematici alle grandezze fisiche (trasposizione in numeri con appropriati metodi di osservazione, sempre soggetti ad incertezze sperimentali)

## FUNZIONA!

La conservazione dell'energia (*ed altre regole di conservazione*) possono discendere da teoremi di analisi, ad esempio:

Teorema degli integrali primi:

A un'equazione differenziale si può associare un'altra equazione (differenziale) di ordine più basso la cui soluzione è una funzione che si "CONSERVA" (costante) in corrispondenza della soluzione dell'equazione iniziale.

Amalie Emmy Noether (Erlangen, 23 marzo 1882 - Bryn Mawr, 14 aprile 1935)

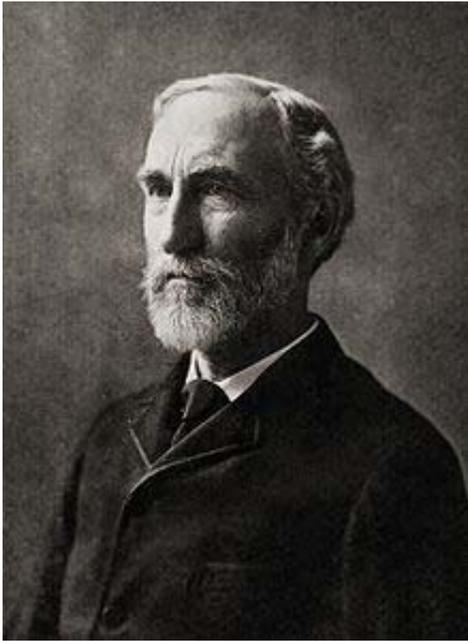
O, in alternativa, il meno conosciuto ma più potente Teorema di Noether:

Se l'equazione che governa un processo fisico ha una simmetria (assenza di cambiamento per cambiamento di qualche variabile), allora a questa corrisponde una grandezza (fisica) che si **CONSERVA**



Ludwig Eduard Boltzmann (Vienna, 20 febbraio 1844 – Duino, 5 settembre 1906)

Josiah Willard Gibbs (New Haven, 11 febbraio 1839 – New Haven, 28 aprile 1903)

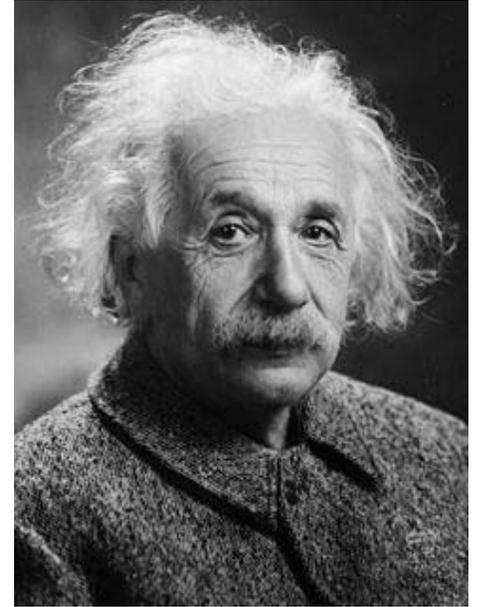


La scienza naturale si sviluppa contemporaneamente alla crescita della matematica, la statistica entra nel gioco, oggetti microscopici entrano come infiniti minuscoli attori, gli atomi

Albert Einstein (Ulma, 14 marzo 1879 – Princeton, 18 aprile 1955)

La geometria si lega alle caratteristiche del cosmo, Poincaré (congettura di, ora teorema di) lascia un segno importante.

La Relatività generale lega la geometria di uno spazio non euclideo al mondo fisico. La geometria non euclidea è stata appena sviluppata da Ricci e Levi-Civita che trova applicazione in una grande visione del cosmo.



La Relatività generale rovescia tutta la visione del mondo, il senso comune viene superato ancora una volta, Einstein ne dava una particolare definizione:

prejudices acquired at an early age.

"Gli atomi crescono".

Nella visione moderna sono compositi ed i loro componenti molto sfuggenti, anzi si ribellano al nostro senso comune in modo inaspettato. Nel mondo microscopico i corpi non seguono traiettorie ma stanno ovunque. Nasce la Meccanica Quantistica. Il mondo sfugge alla nostra visione ma la matematica riesce a gestire l'insieme delle osservazioni. Molti sono gli attori di questa rivoluzione che supera quella copernicana.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^N \nabla_i^2 \Psi + V \Psi$$

Werner Karl Heisenberg (Würzburg, 5 dicembre 1901 – Monaco di Baviera, 1° febbraio 1976)



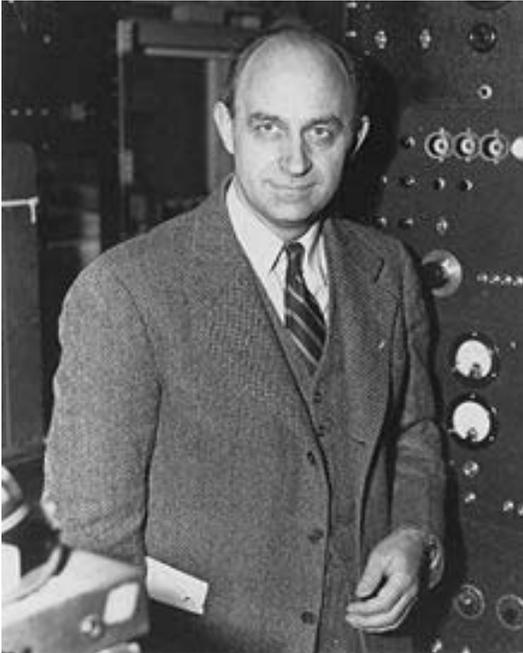
Erwin Rudolf Josef Alexander  
Schrödinger (Vienna, 12 agosto 1887  
– Vienna, 4 gennaio 1961)



Louis-Victor Pierre  
Raymond de Broglie,  
comunemente chiamato  
Louis de Broglie<sup>[1]</sup>  
(Dieppe, 15 agosto 1892  
– Louveciennes, 19  
marzo 1987)



Enrico Fermi (Roma, 29 settembre 1901 – Chicago, 28 novembre 1954)



Fermi è uno dei massimi scienziati del XX secolo. In particolare per spiegare il decadimento "beta" introduce un concetto assolutamente rivoluzionario:

gli oggetti microscopici non mantengono la loro identità, il neutrone si muta in un protone ed un elettrone ma niente permette di pensare che questi siano presenti al suo "interno".

La scienza della natura del XX secolo lascia indietro il senso comune.

Rimangono i "principi primi" che sono strumenti che non possono essere abbandonati senza stravolgere il processo di matematicizzazione dell'osservazione del mondo naturale.

I principi primi sono mezzi necessari, esempio:

Causalità temporale

Omogeneità e isotropia dello spazio e del tempo

Non è possibile rinunciare ad essi senza rinunciare alla matematica.

Il libro della natura è probabilmente scritto in una lingua che per noi umani sarà sempre ignota.

Per noi umani la matematica è un mezzo irrinunciabile, la matematica ha i suoi limiti ma come mezzo di supporto per lo studio della Natura ha dimostrato la sua potenza quando utilizzata insieme ad accurate osservazioni sperimentali.

Le scoperte scientifiche e i risultati tecnologici sono così evidenti che l'attuale libro umano della natura ha una piena validità e promette molte altre pagine ancora da leggere.